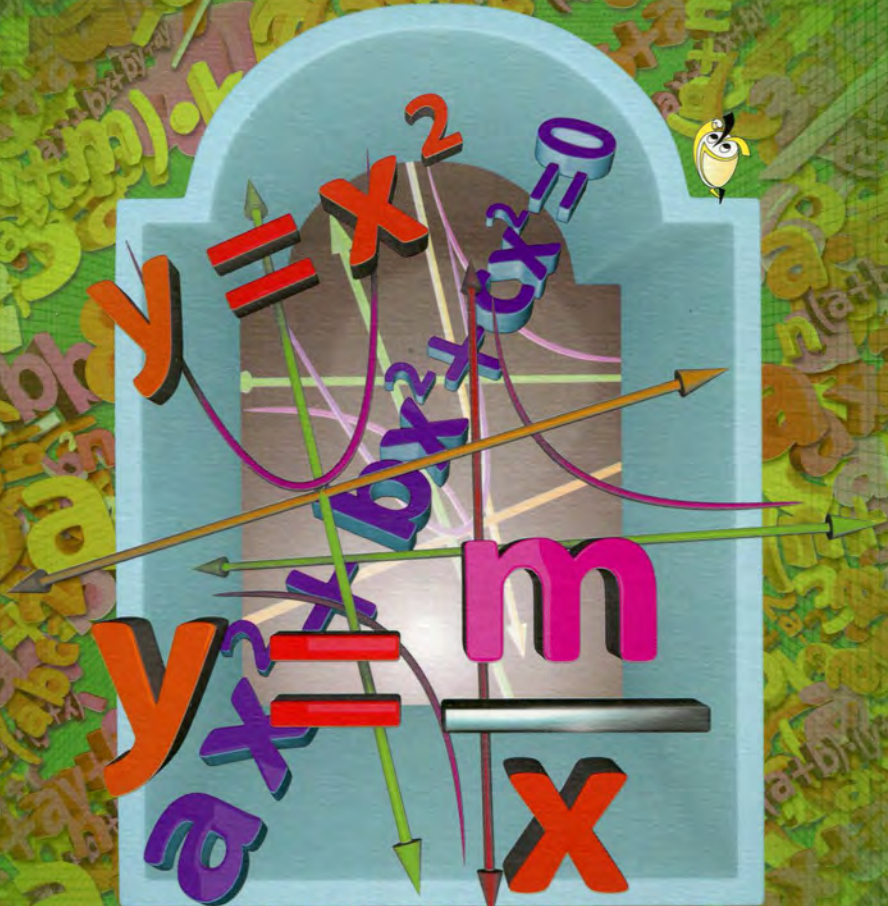
Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

А.Г. Рубин, П.В. Чулков

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК • 7 класс



БАЛАСС

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

А.Г. Рубин, П.В. Чулков

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК • 7 класс

Рекомендовано
Министерством образования и науки Российской Федерации

Москва
БАЛАСС
2013

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
Р82

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

Совет координаторов предметных линий Образовательной системы «Школа 2100» – лауреат премии Правительства РФ в области образования за теоретическую разработку основ образовательной системы нового поколения и её практическую реализацию в учебниках

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (от 14.10.2011) № 10106-5215/819 и Российской академии образования (от 24.10.2011) № 01-5/7д-110

Руководитель издательской программы – доктор пед. наук, проф., член-корр. РАО *Р.Н. Бунеев*

Рубин, А.Г.
Р82 **Алгебра. 7 кл.** : учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Рубин, П.В. Чулков. – М. : Баласс, 2013. – 224 с. : ил. (Образовательная система «Школа 2100»)

ISBN 978-5-85939-921-5

Учебник предназначен для 7-го класса общеобразовательных учреждений, соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, является продолжением непрерывного курса математики и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-85939-921-5

КАК РАБОТАТЬ С УЧЕБНИКОМ

Дорогие ребята!

Вы начинаете учиться в 7-м классе. Все предыдущие 6 лет вашего обучения в школе, начиная с 1-го класса, вы изучали математику. В 7-м классе вы продолжите изучение этой замечательной и очень важной науки, но теперь у вас будет два разных математических учебных предмета: алгебра и геометрия. С их отдельными фрагментами вы уже знакомы и знаете, что геометрия изучает геометрические фигуры и их свойства, а алгебра – буквенные выражения, уравнения, неравенства. Теперь вы займётесь всеми этими вопросами более полно и обстоятельно.

А так как учебных математических предметов будет два, то обучение математике, начиная с 7-го класса, будет проходить по отдельным учебникам – алгебры и геометрии, на отдельных уроках, а ваша работа по каждому из этих предметов будет оцениваться отдельными отметками.

Перед вами учебник алгебры для 7-го класса, написанный Александром Григорьевичем Рубиным и Павлом Викторовичем Чулковым. Этот учебник входит в комплект учебников Образовательной системы «Школа 2100». Так же, как и другие учебники «Школы 2100», он поможет вам в развитии умений (действий), которые необходимы в жизни.

Напоминаем, что эти умения, или действия (они называются универсальными), развиваются через специальные задания, обозначенные в учебнике кружками и фоном условных знаков разного цвета. Каждый цвет соответствует определённой группе умений:

организовывать свои действия: ставить цель, планировать работу, действовать по плану, оценивать результат;

работать с информацией: самостоятельно находить, осмысливать и использовать её;

общаться и взаимодействовать с другими людьми, владеть устной и письменной речью, понимать других, договариваться, сотрудничать.

Так обозначены задания, где нужно применить разные группы умений, мы называем их жизненными задачами и проектами.

Зачем мы будем учиться?

Изучая алгебру в 7-м классе, вы научитесь работать с числовыми и буквенными выражениями, выполнять их преобразования, решать уравнения и системы уравнений, а также моделировать с их помощью многие реальные ситуации.

Это поможет вам стать увереннее в себе, добиться успехов при решении возникающих в жизни задач, так как при этом очень часто придётся иметь дело с перечисленными выше видами деятельности.

Задания на развитие предметных умений обозначены в учебнике серым цветом.

Как мы будем учиться?

Для успешного изучения алгебры и овладения универсальными учебными действиями на уроках открытия нового знания используется проблемный диалог (образовательная технология).

Структура параграфа, где вводится новый материал, имеет в учебнике следующий вид.

Вспоминаем то, что знаем

Так обозначены вопросы, задания и упражнения по изученному материалу, который необходим для открытия нового знания.

Открываем новые знания

Ученики, проводя наблюдения, ищут решение и формулируют свои предположения о том, как решается данная задача, формулируют ответы на поставленные в учебнике вопросы.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Ученики читают, анализируют текст учебника, сопоставляют его со своими предположениями, проверяют правильность своих ответов на вопросы и сделанных на их основании выводов.

Развиваем умения

Так обозначены задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности.

Н **Необходимый уровень.** Эти задания должны уметь выполнять все учащиеся. Они помогут вам определить, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.

П **Повышенный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят расширить свои знания. Они требуют более глубокого усвоения учебного материала, для их решения, наряду с известными приёмами и идеями, может понадобиться выдвижение некоторой новой идеи.

М **Максимальный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные, нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом **выполнение всех заданий учебника не является обязательным ни на одном из уровней**, они выбираются в соответствии с возможностями и потребностями учащихся под руководством педагога. Объём работы планируется в соответствии с возможностями учащихся.

В конце учебника приводятся ответы примерно к половине всех заданий.

В некоторых параграфах новый материал сообщается без использования проблемных ситуаций.

Знакомимся с новой темой

Ученики читают и анализируют текст учебника, делают выводы.

Ориентироваться в учебнике вам помогут условные обозначения

?! Проблемный вопрос.

Это нужно запомнить.

Работа в группе (паре).

Задание с использованием информационных технологий.

Самостоятельная исследовательская работа.

Жизненные задачи и проекты

Помимо обычных учебных заданий разного уровня сложности, в учебник включены жизненные задачи и проекты. Ими можно заниматься в свободное от уроков время в группах или индивидуально.

Что такое жизненная задача?

Жизненная задача – это модель реальной ситуации, для разрешения которой необходим набор математических знаний, к этому моменту вам уже в основном известных. При этом жизненная задача отличается от привычных всем школьных учебных задач. Это отличие прежде всего заключается в том, что для её решения вам может понадобиться дополнительная информация, которую придётся добывать самим, причём какая именно информация нужна, вы должны решать сами и самостоятельно искать источники этой информации. В случае затруднений вы можете обратиться к старшим товарищам, учителю или другим взрослым.

В условии жизненной задачи могут содержаться избыточные данные. Ведь в жизни чаще всего так и бывает: когда пытаешься разобраться в ситуации и анализируешь, что тебе о ней известно, то в ходе анализа постепенно выясняется, что далеко не вся эта информация пригодится, значительная её часть не имеет отношения к делу. Кроме того, для решения жизненной задачи будут необходимы знания не только из области математики, но и других изучаемых вами областей (как это и происходит в реальной жизни). Таким образом, систематическое решение жизненных задач даст вам возможность не только углубиться в математику, увидеть взаимосвязь математики и других областей знаний, но и совершенствовать умение самостоятельно работать с информацией.

Жизненные задачи, как принято в учебниках Образовательной системы «Школа 2100», оформлены следующим образом.

СИТУАЦИЯ. Условия, в которых возникла проблема.

ВАША РОЛЬ. Человек, в роли которого вы должны себя представить, решая проблему.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Более подробная характеристика ситуации.

ЗАДАНИЕ. Что нужно сделать или что нужно получить в итоге.

Что такое проект?

Это любое самостоятельное дело, которое предполагает:

1. Оригинальный замысел (цель).
2. Выполнение работы за определённый отрезок времени.
3. Конкретный результат, представленный в итоге (мероприятие, решение проблемы, результат самостоятельных исследований и др.).

Проектная деятельность помогает научиться работать в команде, распределять роли таким образом, чтобы наиболее эффективно использовать сильные стороны каждого, участвовать в мозговых штурмах и других формах коллективной интеллектуальной деятельности, представлять результаты своего труда в форме доклада, презентации, инсценировки и т.д. Предполагается, что проекты будут выполняться в свободное от уроков время. Они не являются обязательными.

Структура учебника

Учебник разбит на главы, а каждая глава – на параграфы. Каждый параграф обозначается двумя числами: число слева от точки – номер главы, а число справа от точки – номер параграфа в этой главе. В каждой главе рассматривается своя тема, а в каждом параграфе – отдельные вопросы этой темы.

Особенностью учебника является то, что задания на повторение изученного материала не даются после каждого параграфа или главы, а собраны в конце учебника, после последней, пятой главы. Там приведено большое количество заданий с разбивкой материала по параграфам. Это даст учителю возможность наиболее эффективно, исходя из особенностей класса, а также с учётом индивидуальной образовательной траектории каждого ученика организовать этот важнейший в обучении вид деятельности.

Работая по нашему учебнику, вы не только узнаете много нового, не только научитесь решать большое количество разнообразных математических задач, но и приобретёте важнейшее умение – учиться самостоятельно:

- ставить учебную цель;
- планировать своё движение к цели и действовать по плану;
- оценивать результаты своего труда.

ГЛАВА I ОДНОЧЛЕНЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1 Алгебраические выражения

Знакомимся с новой темой

При решении задач вам неоднократно приходилось для нахождения интересующей вас величины совершать арифметические действия (ещё говорят *операции*) над числами. У вас получались *числовые выражения*.

Например, если вы купили 3 пакета молока по 16 руб. за пакет и 4 пакета кефира по 14 руб. за пакет, то стоимость покупки (в рублях) задаётся с помощью числового выражения $3 \cdot 16 + 4 \cdot 14$.

Если выполнить все действия в числовом выражении, то получится число, называемое *значением числового выражения*.

Порядок выполнения действий в числовом выражении определяется правилами, с которыми вы хорошо знакомы ещё из младших классов. Подробно мы об этом поговорим в следующем параграфе.

Скажем, при нахождении значения рассмотренного числового выражения мы сначала выполняем умножения: $3 \cdot 16 = 48$; $4 \cdot 14 = 56$, а затем находим сумму полученных произведений: $48 + 56 = 104$. Таким образом, значение числового выражения $3 \cdot 16 + 4 \cdot 14$ равно 104.

Приведём ещё несколько примеров числовых выражений:

$$(15 - 98) \cdot 3;\ \frac{1}{3} + 8 : 6{,}9 - \frac{5}{8};\ (17 + 6) + 5 \cdot (16 - 7).$$

Заметим, что числовое выражение может состоять из единственного числа.

Например: 7; $-11{,}25$; $\frac{2}{7}$; 0 – числовые выражения.

При нахождении значения числового выражения необходимо, чтобы все операции были выполнимы. Вы знаете, что из арифметических операций сложение, вычитание и умножение выполнимы всегда, т.е. для любых двух чисел можно найти их сумму, разность и произведение. Что касается операции деления, то имеется одна ситуация, когда эта операция невыполнима: когда делитель равен нулю, поскольку делить на нуль нельзя. Если числовое выражение таково, что в процессе нахождения его значения возникает ситуация деления на нуль, то такое числовое выражение считается *не имеющим смысла*. Говорят также, что такое числовое выражение *не определено*. У такого числового выражения нет никакого значения.

Например, про числовое выражение $(2 \cdot 6 + 12) : (2 \cdot 6 - 12)$ можно сказать, что оно не определено, или что оно не имеет смысла, или что у этого числового выражения нет никакого значения.

С младших классов вы также знакомы с *буквенными выражениями*.

Буквенные выражения возникают, если в числовом выражении некоторые числа заменить буквами.

Например, если карандаши продаются в коробках по 12 карандашей в каждой и нас интересует, сколько карандашей содержится в четырёх коробках, то ответ задаётся числовым выражением $12 \cdot 4$; если нас интересует, сколько карандашей содержится в пяти коробках, то числовым выражением $12 \cdot 5$; в шести коробках – числовым выражением $12 \cdot 6$ и т.д. В рассмотренной ситуации количество коробок каждый раз разное. Мы можем обозначить количество коробок какой-нибудь буквой, например n, и сказать, что количество карандашей, содержащихся в n коробках, задаётся выражением $12 \cdot n$. Это пример буквенного выражения.

Рассмотрим ещё один пример. Предположим, что нам требуется найти периметр прямоугольника, стороны которого известны. Если это придётся делать несколько раз, то вместо того, чтобы записывать каждый раз новое числовое выражение, удобно обозначить длины сторон буквами, скажем, a и b, и записать периметр прямоугольника в виде буквенного выражения $2a + 2b$.

Если в буквенное выражение вместо букв подставить числа, то получится числовое выражение. Значение этого числового выражения называется *значением буквенного выражения* при взятых (говорят также: выбранных или заданных) значениях букв.

Например, значение буквенного выражения $12n$ при $n = 6$ равно значению числового выражения $12 \cdot 6$, т.е. 72. Значение буквенного выражения $2a + 2b$ при $a = 15$ и $b = 6{,}5$ равно значению числового выражения $2 \cdot 15 + 2 \cdot 6{,}5$, т.е. 43.

Ясно, что числовое выражение, в которое превращается буквенное выражение при заданных значениях букв, должно иметь смысл. Это значит, что в этом числовом выражении не должно присутствовать деление на нуль.

Например, буквенное выражение $5x(y - 5)$ имеет смысл при всех значениях входящих в него букв x и y, а буквенное выражение $(2p + 3):(p - 2)$ не имеет смысла (или, по-другому, не определено) при $p = 2$. Можно сказать и так: выражение $(2p + 3):(p - 2)$ имеет смысл при всех действительных значениях p, кроме $p = 2$. Или ещё короче: при всех $p \neq 2$.

Использование букв позволило сильно упростить записи. Раньше, до того как стали применять буквы, выражение – например, $3x$ – записывали целой фразой, вроде «утроенное значение неизвестной величины». Для записи более сложных выражений приходилось использовать несколько предложений.

Буквенные выражения входят также в *формулы* для нахождения тех или иных величин. Например, площадь прямоугольного треугольника может быть найдена по формуле $S = \frac{1}{2}ab$, где a и b – катеты этого треугольника. Мы видим, что площадь прямоугольного треугольника задаётся буквенным выражением $\frac{1}{2}ab$.

Буквы, входящие в буквенные выражения, могут принимать разные значения, т.е. могут меняться. Потому их также называют *переменными*, а буквенные выражения также называют *выражениями с переменными*.

Буквенные выражения, а также числа и числовые выражения называются *алгебраическими выражениями*.

Если взять два алгебраических выражения и соединить их знаком сложения, вычитания, умножения или деления, то получится новое алгебраическое выражение, называемое соответственно суммой, разностью, произведением или частным взятых алгебраических выражений.

Развиваем умения

Н

1 Определите, какие из числовых выражений имеют смысл. Для выражений, имеющих смысл, найдите их числовые значения:

а) $(2{,}7-3{,}32):(2{,}2\cdot 3-6{,}5)$;

б) $\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{1+1:(1+1:2)}$;

в) $\dfrac{1}{3{,}2}-\dfrac{1}{2{,}98}-\dfrac{1}{3{,}2}+\dfrac{1}{2{,}98}$;

г) $\dfrac{14{,}56+2{,}21\cdot 4}{17{,}68+(-3{,}4)\cdot 5{,}2}$;

д) $(21-21):(22-22)$;

е) $\dfrac{21{,}3}{22{,}3-21{,}3}-\dfrac{11{,}8-45{,}5}{17{,}23-17{,}22}$;

ж) $12{,}11:\left(11-5\cdot\dfrac{11}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5}\right)$;

з) $\dfrac{-15{,}6+6\cdot 3{,}1}{11{,}25-3{,}3\cdot 2{,}5}$.

2 Запишите в виде буквенного выражения:

а) сумма чисел a и b;

б) удвоенная разность чисел p и q;

в) сумма чисел c и d, делённая на 4;

г) произведение суммы чисел m и n на их разность;

д) разность утроенного числа k и половины числа s;

е) произведение разности чисел p и q на частное от деления их суммы на их произведение.

3 Найдите значения алгебраического выражения $2x-3$ при данных значениях переменной:

а) $x=2$; б) $x=\dfrac{3}{2}$; в) $x=7$; г) $x=-2{,}25$; д) $x=-1{,}1$; е) $x=-5{,}12$; ж) $x=0{,}013$; з) $x=-0{,}013$.

4 Найдите значения алгебраического выражения $(2p-7q):(p+4)$ при данных значениях переменных p и q:

а) $p=2$; $q=2$;

б) $p=4$; $q=1$;

в) $p=-3$; $q=-2$;

г) $p=\dfrac{3}{4}$; $q=-\dfrac{5}{2}$;

д) $p = -0{,}64$; $q = -3{,}5$;

е) $p = -5$; $q = -3{,}5$;

ж) $p = -3{,}99$; $q = -1{,}14$;

з) $p = 0{,}22$; $q = -\frac{27}{50}$.

5 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значение выражения $3a - 1$ при указанных значениях a.

a	2	4	-1	$-1{,}6$	7,12	-119
$3a - 1$						

6 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значение выражения $3s + 7$ при указанных значениях s.

s	-2	0	2	$-12{,}5$	3,3	19
$3s + 7$						

7 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значение выражения $3x + 2y$ при указанных значениях x и y.

x	2	4	-3	$\frac{1}{3}$	$\frac{23}{7}$	2,13
y	3	-1	-2	$-0{,}5$	$-\frac{69}{14}$	13,2
$3x + 2y$						

8 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значение выражения $7m - 5n$ при указанных значениях m и n.

m	0,5	0,45	7	-5	$\frac{1}{5}$	$-1{,}17$
n	0,7	0,23	5	-7	$-\frac{3}{25}$	0,002
$7m - 5n$						

9 При каких значениях переменной выражение не имеет смысла:

а) $q + 2 : (q + 2)$;

б) $\frac{r}{2} - \frac{2}{r} \cdot \frac{1+r}{1-r}$;

в) $\dfrac{5x+7}{6x-4}$;

г) $\dfrac{w}{(w-1)(w+2)}$;

д) $\dfrac{q}{q+1}+\dfrac{q+1}{q+2}+\dfrac{q+2}{q+3}$;

е) $\dfrac{x-2}{x+2}$;

ж) $\dfrac{1}{1-7t}$;

з) $\dfrac{11}{13-x}+\dfrac{13-x}{11}$?

10 При каких значениях переменных выражение не имеет смысла:

а) $(2x-8y+3):(y-8)$;

б) $\dfrac{-3+6g-2i}{8g-3}$;

в) $\dfrac{3z-6y}{7-19z}$;

г) $(9c+10v-6):(12p-5)$;

д) $(6z-9+5h):(-14-3u)$;

е) $\dfrac{x-y}{2x-6}$;

ж) $\dfrac{10p-10}{13b-4}$;

з) $(2+7r+2x):(2a+9)$?

11 При каких значениях переменных имеет смысл выражение:

а) $-2a(c+2a)$;

б) $\dfrac{3}{m-1}-n-1$;

в) $\dfrac{5}{x}+x$;

г) $\dfrac{u}{u-1}\left(z-\dfrac{z+1}{z-2}\right)$;

д) $\dfrac{a}{a^2+1}$;

е) $fgh(f^2+g^3+h^4)$;

ж) $q+\dfrac{q}{3-2q}$;

з) $\dfrac{s+2}{s-1}\cdot\dfrac{s-1}{s+2}$?

12 Запишите сумму, разность, произведение и частное алгебраических выражений:

а) $3x-2y$ и $2m-5$;

б) $-10j+3l$ и $13d+19l$;

в) $4v$ и $7d-7y$;

г) $-4g-7w$ и $10s-f$;

д) $3z-10r$ и $-8-13l$;

е) $10x+4y$ и $10v-30$;

ж) $-9e$ и $14k-19y$;

з) $8j+10y$ и $-14x+9z$.

13 Запишите алгебраическое выражение, с помощью которого можно найти:

а) стоимость покупки n предметов ценой x каждый;

б) площадь прямоугольного сада со сторонами l и h;

в) количество осадков, пролившихся на 1 м^2 в тропическом лесу за час, если за минуту на 1 м^2 выпадает w л осадков;

г) стоимость книги, которая на 23 рубля меньше, чем увеличенная в 7 раз стоимость K карандаша.

д) длину окружности радиуса R;

е) объём куба со стороной s;

ж) периметр прямоугольника со сторонами i и j;

з) путь, пройденный за час велосипедистом, который едет с постоянной скоростью v м/с.

14 Запишите буквенное выражение для нахождения нужной величины.

а) Пешеход шёл 2 часа со скоростью x км/ч и 3 часа со скоростью y км/ч. Какое расстояние прошёл пешеход?

б) Вода лилась 22 минуты со скоростью v л/мин и 13 минут со скоростью u л/с. Сколько литров воды вылилось за эти 35 минут?

в) Длину каждой стороны a квадратного сада увеличили в g раз. На сколько увеличилась площадь сада?

г) Длину каждого из рёбер куба увеличили в s раз. На сколько увеличился после этого его объём, если первоначальная длина ребра составляла l?

П

15 Запишите буквенное выражение для нахождения нужной величины.

а) На сколько квадратных метров увеличилась площадь прямоугольника, если одну из его сторон длиной a м увеличили в A раз, а другую его сторону длиной b м увеличили на B м?

б) Для производства изделия нужно пять деталей, стоимость первой из которых равна R руб., стоимость второй на 3 руб. больше, чем первой, стоимость третьей в 2 раза больше, чем второй, стоимость четвёртой равна сумме стоимостей первой и третьей, а стоимость пятой меньше стоимости первой и третьей, взятых вместе, на 14 руб. Чему равна общая стоимость пяти деталей?

в) За какое время путник прошёл 15 км, если первые 5 км он шёл со скоростью w км/ч, вторые 5 км со скоростью в 2 раза большей, а оставшиеся 5 км со скоростью, ещё на 1 км/ч большей?

16 Введите необходимые буквы и запишите указанные выражения.

а) Лодка, собственная скорость которой 6 км/ч, прошла 5 км против течения, сделала стоянку на 2 ч, после чего вернулась назад в пункт отправления. Запишите выражение, показывающее, через сколько часов после отплытия из начального пункта лодка вернулась назад.

б) Бассейн заполняется водой, поступающей из двух труб. Производительность первой трубы 25 $м^3$/мин. Запишите выражение, показывающее, через сколько минут обе трубы, включённые одновременно, заполнят бассейн.

в) Длину и ширину прямоугольного земельного участка увеличили на 2 м. Запишите выражения, показывающие, во сколько раз и, соответственно, на сколько квадратных метров увеличилась площадь участка.

17 Имеется два сплава меди с оловом. В первом сплаве меди в k раз больше, чем олова, а во втором меди в n раз больше, чем олова. Запишите выражение, показывающее массу меди в сплаве, полученном при сплавлении по 1 кг каждого из сплавов.

18 Запишите буквенное выражение для нахождения нужной величины. Объясните, что обозначает каждая буква в записанном вами выражении.

а) Стоимость покупки, если купили 4 одинаковых карандаша и 6 одинаковых ластиков.

б) Время движения лодки, проплывшей с одинаковой собственной скоростью 3 км по течению и вернувшейся назад.

в) Средний балл за контрольную работу, если писавшие её школьники получили только отметки «4» и «5».

М

19 Семиклассник Валя утверждает, что в какой-то серьёзной книге по математике про алгебраические выражения было написано следующее:
«Алгебраическим выражением является только:

а) число;

б) буква;

в) сумма, разность, произведение и частное двух алгебраических выражений».

Как вы думаете, это то же самое, что написано про алгебраические выражения в параграфе 1.1 выше?

1.2 Степени с натуральными показателями и их свойства

Знакомимся с новой темой

Ещё в пятом классе вы познакомились с понятием степени числа. Скажем, 4-я степень числа 5 – это произведение четырёх сомножителей, каждый из которых равен 5:

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625.$$

При этом число 5, которое перемножали, называется *основанием степени;* число 4, которое показывает, сколько сомножителей было в произведении, называется *показателем степени*; числовое выражение 5^4 (а также его значение 625) называется *степенью*.

Рассмотрим ещё один пример: 3-я степень числа $\left(-\frac{6}{7}\right)$ представляет собой произведение трёх сомножителей, каждый из которых равен $\left(-\frac{6}{7}\right)$:

$$\left(-\frac{6}{7}\right)^3 = \left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{216}{343}.$$

Теперь мы изучим степени более подробно.

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n сомножителей, каждый из которых равен a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

Степенью числа a с показателем 1 называется само число a.

$$a^1 = a$$

Часто вместо «найдём n-ю степень числа a» говорят «возведём число a в n-ю степень».

Например, возводя число 2 в 9-ю степень, получим:

$$2^9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512,$$

а возводя число –7 в 5-ю степень, получим:

$$(-7)^5 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = -16\,807.$$

Таким образом, можно говорить, что наряду с операциями сложения, вычитания, умножения и деления мы изучаем новую операцию – возведение в натуральную степень.

Полезно рассмотреть несколько простейших свойств этой операции.

При возведении положительного числа в любую натуральную степень получится положительное число.

Это объясняется тем, что произведение положительных чисел положительно.

Например: $5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15\,625$.

При возведении нуля в любую натуральную степень получится нуль.

Например: $0^9 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

При возведении отрицательного числа в чётную степень получится положительное число, а при возведении отрицательного числа в нечётную степень получится отрицательное число.

Это объясняется тем, что произведение чётного числа отрицательных множителей является положительным числом, а произведение нечётного числа отрицательных множителей является отрицательным числом.

Например:

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81;$$
$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243.$$

Полезно также рассмотреть основные особенности степеней с чётными показателями и свойства степеней с нечётными показателями.

Чётная степень ненулевого числа положительна.

Нечётная степень ненулевого числа имеет такой же знак, как и это число.

Чётные степени противоположных чисел равны.

$$(-a)^n = a^n \text{ при чётном } n.$$

Например, $(-32)^4 = 32^4$; $\left(-\frac{7}{9}\right)^{12} = \left(\frac{7}{9}\right)^{12}$; $0{,}083^6 = (-0{,}083)^6$.

Нечётные степени противоположных чисел являются противоположными числами.

$$(-a)^n = -a^n \text{ при нечётном } n,$$

или по-другому: $a^n = -(-a)^n$ при нечётном n.

Например, $(-32)^7 = -32^7$; $32^7 = -(-32)^7$;

$$\left(-\frac{7}{9}\right)^{19} = -\left(\frac{7}{9}\right)^{19};\ \left(\frac{7}{9}\right)^{19} = -\left(-\frac{7}{9}\right)^{19}.$$

Ещё в младших классах вы усвоили порядок выполнения операций (или, по-другому, действий) в выражении без скобок: сначала выполняются операции умножения и деления слева направо, а затем операции сложения и вычитания слева направо. При появлении новой операции – возведение в степень – порядок выполнения операций уточняется следующим образом.

Сначала выполняются операции возведения в степень, затем операции умножения и деления, а затем операции сложения и вычитания.

Например, при нахождении значения выражения $5 \cdot 2^3 + 486 : 3^4$ порядок действий будет следующий:

1) $2^3 = 8$; 2) $3^4 = 81$; 3) $5 \cdot 8 = 40$; 4) $486 : 81 = 6$; 5) $40 + 6 = 46$.

Также ещё в младших классах вы научились записывать натуральное число в виде суммы разрядных слагаемых. Например, для числа 58 374 вы делали это так: $58\,374 = 50\,000 + 8\,000 + 300 + 70 + 4$ или так: $58\,374 = 5 \cdot 10\,000 + 8 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4$.

Теперь, используя натуральные степени числа 10, вы можете сделать это ещё и так: $58\,374 = 5 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$.

С помощью натуральных степеней числа 10 принято записывать очень большие числа. Например, масса Луны составляет $7{,}348 \cdot 10^{22}$ кг, а её объём составляет $2{,}2 \cdot 10^{19}$ м^3.

Такой вид числа называется *стандартным видом*.

Стандартный вид числа, большего 10, следующий: $x \cdot 10^n$, где $1 \le x < 10$, а n – натуральное число.

Если выразить, скажем, объём Луны в кубических метрах без использования стандартного вида числа, то получится: 22 000 000 000 000 000 000.

Такая запись очень громоздкая, и работать с ней неудобно (трудности начинаются даже с того, как прочитать это число).

Рассмотрим ещё несколько примеров записи чисел в стандартном виде:

$48\,000 = 4{,}8 \cdot 10^4$; $213{,}5 = 2{,}135 \cdot 10^2$; $2\,500\,000\,000 = 2{,}5 \cdot 10^9$.

Последнее из чисел можно прочитать так: «два с половиной миллиарда», ведь 10^9 – это миллиард.

Н

1 Запишите произведение в виде степени. Укажите в записанных выражениях основание степени и показатель степени:

а) $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$;

б) $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$;

в) $(-87) \cdot (-87)$;

г) $(-61) \cdot (-61) \cdot (-61) \cdot (-61) \cdot (-61)$;

д) $(-75) \cdot (-75) \cdot (-75)$;

е) $29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29$;

ж) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$;

з) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$.

2 Запишите произведение в виде степени. Укажите в записанных выражениях основание степени и показатель степени:

а) $\left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right)$;

б) $\left(\frac{9}{20}\right) \cdot \left(\frac{9}{20}\right) \cdot \left(\frac{9}{20}\right)$;

в) $\left(\frac{17}{28}\right) \cdot \left(\frac{17}{28}\right) \cdot \left(\frac{17}{28}\right) \cdot \left(\frac{17}{28}\right) \cdot \left(\frac{17}{28}\right)$;

г) $\left(\frac{12}{35}\right) \cdot \left(\frac{12}{35}\right)$;

д) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$;

е) $\left(-\frac{51}{52}\right) \cdot \left(-\frac{51}{52}\right)$;

ж) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

з) $\left(-\frac{3}{13}\right) \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) \cdot \left(-\frac{3}{13}\right)$.

3 Запишите произведение в виде степени. Укажите в записанных выражениях основание степени и показатель степени:

а) $m \cdot m \cdot m \cdot m$;

б) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$;

в) $\left(z+\frac{1}{z}\right) \cdot \left(z+\frac{1}{z}\right)$;

г) $(w+u-1) \cdot (w+u-1) \cdot (w+u-1)$;

д) $(c-5) \cdot (c-5) \cdot (c-5)$;

е) $(1-x) \cdot (1-x) \cdot (1-x) \cdot (1-x)$;

ж) $l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l \cdot l$;

з) $\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R}$.

4 Запишите степень в виде произведения:

а) 6^7;

б) 7^6;

в) $(0{,}9794)^5$;

г) $\left(\frac{139}{224}\right)^2$;

д) $(-4)^4$;

е) $(-181)^9$;

ж) $(-0{,}07)^7$;

з) $\left(-\frac{51}{67}\right)^3$.

5 Запишите степень в виде произведения:

а) t^4;
б) $(a-b)^2$;
в) $(x+y)^5$;
г) Z^7;
д) $(w+s)^3$;
е) $(a+b-c)^2$;
ж) $\left(\frac{K}{H}\right)^8$;
з) $(2-3a+6b)^4$.

Н

6 Упростите, записав произведения в виде степеней:

а) $2\cdot2\cdot2\cdot7\cdot7$;
б) $3\cdot5\cdot5\cdot3\cdot5\cdot3\cdot3$;
в) $\frac{8}{3}\cdot4\cdot4\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cdot4\cdot\frac{8}{3}$;
г) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}$;
д) $12\cdot12\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot12\cdot(-4)$;
е) $2\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot2\cdot2\cdot2\cdot(-2)\cdot2\cdot2$;
ж) $\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)$;
з) $\left(-\frac{13}{17}\right)\cdot(-7)\cdot\left(-\frac{13}{17}\right)\cdot(-7)\cdot(-7)$.

7 Используя степени, запишите число в виде суммы разрядных слагаемых:

а) 224;
б) 34 878;
в) 70 039;
г) 4 501 286;
д) 925;
е) 7 462;
ж) 68 775;
з) 523 601;
и) 6 056 188;
к) 25 842 495;
л) 901 052 776;
м) 153 340 821.

8 Запишите число, заданное с помощью суммы разрядных слагаемых:

а) $4\cdot10^4+9\cdot10^3+2\cdot10^2+8\cdot10+7$;
б) $9\cdot10^5+7\cdot10^4+8\cdot10^2+8\cdot10+1$;
в) $7\cdot10^8+7\cdot10^7+7\cdot10^6+5\cdot10^5+6\cdot10^4+6\cdot10^3+0\cdot10^2+5\cdot10+1$;
г) $9\cdot10^6+6\cdot10^5+1\cdot10^4+6\cdot10^3+2\cdot10^2+4\cdot10+5$;
д) $3\cdot10^4+9\cdot10^2+4\cdot10^2+1\cdot10+5$;
е) $3\cdot10^6+0\cdot10^5+1\cdot10^4+0\cdot10^3+4\cdot10^2+4\cdot10+8$;
ж) $5\cdot10^3+3\cdot10^2+9\cdot10+8$.

9 Запишите число в стандартном виде:

а) 24 000 000;
б) 2 012;
в) 27 000 000 000 000 000;
г) 70 002 233 000;
д) 56,3;
е) 112 000 000 000;
ж) 456 000;
з) 1 000 000 000 000 000 000.

10 Запишите в виде целого числа или десятичной дроби:

а) $9{,}7 \cdot 10^5$;

б) $3{,}27787 \cdot 10^6$;

в) $9 \cdot 10^8$;

г) $1{,}0000000001 \cdot 10^5$;

д) $8{,}721 \cdot 10^2$;

е) $4{,}4180297 \cdot 10^6$;

ж) $1{,}5376 \cdot 10^3$;

з) $1{,}234 \cdot 10^4$.

11 Установите порядок выполнения действий и найдите значение выражения:

а) $3 \cdot 5^4 + 4{,}5 : 3^3$;

б) $2{,}1 \cdot 6^2 - 2{,}2 \cdot 7^3 + 6{,}79 \cdot 10^3$;

в) $3^3 \cdot 2^4 : 6^3 - 3^4 \cdot 2^2 \cdot 6^2$;

г) $1^3 + 2^3 + 3^3 - (1 + 2 + 3)^2$;

д) $6 \cdot (-3)^4 - 4{,}5 \cdot 2^2$;

е) $\dfrac{7 \cdot 0{,}0031 \cdot 10^2 - 1}{0{,}86 + 0{,}0031 \cdot 10^2}$;

ж) $(25{,}45 \cdot 7^3 - 45{,}25 \cdot 5^2) \cdot 10 - 7{,}598 \cdot 10^4$;

з) $\dfrac{(19^2 - 18^2) \cdot (19^3 - 18^3) : 7^3}{37^2}$.

П

12 а) Докажите, что квадрат любого числа неотрицателен.

б) Докажите, что $a^2 > 0$ лишь при $a \neq 0$.

в) Докажите, что $a^2 = 0$ лишь при $a = 0$.

13 а) Докажите, что чётная степень любого числа неотрицательна.

б) Докажите, что для чётных n $a^n > 0$ лишь при $a \neq 0$.

в) Докажите, что для всех натуральных n равенство $a^n = 0$ верно лишь при $a = 0$.

14 При каких натуральных значениях x выражение положительно:

а) $7^{x+1} \cdot (-5)^x$;

б) $(-3)^{x-3} \cdot (-2)^{x-2}$;

в) $(-1)^7 \cdot (-2)^8 \cdot (-3)^9 \cdot (-x)^{10}$;

г) $(-5)^{10} \cdot (-12)^4 \cdot (-4{,}3)^7 \cdot (-x)^{19}$;

д) $x^3 \cdot x^2 \cdot x$;

е) $21^x \cdot (-21)^x$;

ж) $(-x)^3 \cdot x^3 \cdot (-11)^5$;

з) $\left(\dfrac{-1}{-3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{1}{-3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$?

1.3 Умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями

Ещё в младших классах, изучая операции сложения, вычитания, умножения и деления, вы познакомились с их основными свойствами, без уверенного владения которыми невозможно представить себе выполнение вычислений. Эти свойства выражаются в словесном виде, а также записываются в виде формул.

У нас сейчас нет цели вспомнить все свойства операций сложения, вычитания, умножения и деления. Мы вспомним лишь несколько из них и запишем соответствующие формулы.

А) Переместительное свойство сложения может быть записано формулой

$$a + b = b + a$$

и сформулировано в виде «От перестановки слагаемых сумма не меняется» или в виде «Сумма первого и второго числа равна сумме второго и первого числа».

Б) Распределительное свойство умножения относительно сложения (называемое также правилом умножения суммы на число или правилом раскрытия скобок при умножении) может быть записано формулой

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

и сформулировано в виде «Для умножения суммы на число нужно умножить на это число каждое слагаемое в отдельности, а затем сложить полученные произведения».

Мы изучим пять основных свойств операции возведения в степень (два в этом параграфе и три в следующем), запишем и докажем соответствующие формулы. Без твёрдого знания этих формул, уверенного владения ими трудно представить себе выполнение вычислений со степенями.

Вспоминаем то, что знаем

- Чему равно 2^5? 7^2? a^3? c^4? m^1?
- Что называется степенью числа с натуральным показателем?
- Верно ли, что для любого натурального k x^k – это произведение k сомножителей, каждый из которых равен x?

Умножение степеней с одинаковыми основаниями

Открываем новые знания

- Закончите преобразования:

а) $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = \ldots$

б) $x^3 \cdot x^4 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x) = \ldots$

- Подберите такой показатель степени, чтобы равенство было верным:

$3^5 \cdot 3^6 = 3^{\sqcup}$; $c^7 \cdot c^1 = c^{\sqcup}$; $a^m \cdot a^n = a^{\sqcup}$.

- Обоснуйте свой ответ.

?! Как найти произведение двух степеней с одинаковыми основаниями?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Для любого действительного числа a и любых натуральных чисел m и n

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней складываются.

Иногда это свойство формулируют ещё короче:

При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются.

Естественно, при такой совсем краткой формулировке неявно предполагается, что основание остаётся прежним (раз про него ничего не сказано, значит, оно не меняется).

Для доказательства рассматриваемого свойства воспользуемся определением степени с натуральным показателем.

Если $m > 1$ и $n > 1$, то

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n},$$

и свойство для этого случая доказано.

Если $m > 1$ и $n = 1$, то

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^1 = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+1} = a^{m+1} = a^{m+n},$$

и свойство для этого случая доказано.

Если $m = 1$ и $n > 1$, то проводится точно такое же рассуждение, как предыдущее.

Если, наконец, $m = 1$ и $n = 1$, то

$$a^m \cdot a^n = a^1 \cdot a^1 = a \cdot a = a^2 = a^{1+1} = a^{m+n},$$

и свойство для этого последнего случая тоже доказано.

Таким образом, свойство полностью доказано.

Например, зная, что $3^3 = 27$, а $3^4 = 81$, при нахождении 3^7 можно записать: $3^7 = 3^3 \cdot 3^4 = 27 \cdot 81 = 2\,187$.

Рассматриваемое свойство справедливо также, когда количество перемножаемых степеней больше двух.

Например, при перемножении трёх степеней будем иметь: $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$, при перемножении четырёх: $a^m \cdot a^n \cdot a^k \cdot a^l = a^{m+n+k+l}$ и т.д.

Деление степеней с одинаковыми основаниями

Открываем новые знания

- Закончите преобразования.

а) $\dfrac{2^5}{2^3} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \ldots$

б) $\dfrac{x^5}{x^3} = \dfrac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \ldots$

- Подберите такой показатель степени, чтобы равенство стало верным.

$\dfrac{3^6}{3^2} = 3^{\sqcup}$; $\dfrac{c^4}{c^1} = c^{\sqcup}$; $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{\sqcup}$.

- Обоснуйте свой ответ.

?! Как найти частное двух степеней с одинаковыми основаниями?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Для любого действительного числа a, отличного от нуля, и любых натуральных чисел m и n, таких, что $m > n$,

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатель равен разности показателей делимого и делителя.

Иногда это свойство формулируют ещё короче:

При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются.

Естественно, при такой совсем краткой формулировке молчаливо предполагается, что основание остаётся прежним и что показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого.

Формулу, выражающую рассматриваемое свойство, можно записать и в другом виде:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Для доказательства рассматриваемого свойства достаточно доказать, что произведение множителей a^{m-n} и a^n равно a^m. Но по доказанному выше правилу перемножения степеней с одинаковым основанием действительно

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^{m-n+n} = a^m.$$

Доказательство закончено.

Рассмотрим несколько примеров:

$3^{17} : 3^{13} = 3^{17-13} = 3^4 = 81$; $x^{10} : x = x^{10} : x^1 = x^{10-1} = x^9$.

Развиваем умения

Н

1 Запишите произведение в виде степени:

а) $a^3 \cdot a^2$;

б) $x^{13} \cdot x^{12} \cdot x^5$;

в) $z^2 \cdot z^2 \cdot z^4$;

г) $y \cdot y \cdot y^8$;

д) $q^2 \cdot q^3$;

е) $t^7 \cdot t^4$;

ж) $i^5 \cdot i^2 \cdot i^4 \cdot i^9$;

з) $w \cdot w^2 \cdot w^3 \cdot w^4 \cdot w^5$.

2 Запишите произведение в виде степени:

а) $a^5 \cdot a^3$;

б) $b^3 \cdot b^2 \cdot b^4 \cdot b^3 \cdot b^2$;

в) $s^{234} \cdot s^{66}$;

г) $z^{70} \cdot z^{60} \cdot z^{20}$;

д) $l^{21} \cdot l^{12} \cdot l^{33}$;

е) $t^3 \cdot t^6$;

ж) $u^2 \cdot u^3 \cdot u^5 \cdot u^8 \cdot u^{13} \cdot u^{21}$;

з) $r^{128} \cdot r^{64} \cdot r^{32} \cdot r^{16} \cdot r^8 \cdot r^4 \cdot r^2$.

3 Представьте в виде степени:

а) $2^3 \cdot 4$;

б) $64 \cdot 2^4$;

в) $729 \cdot 3^2$;

г) $49 \cdot 7^{11}$;

д) $5 \cdot 25 \cdot 125$;

е) $6 \cdot 6^4 \cdot 1\,296$;

ж) $1\,024 \cdot 2^{10}$;

з) $3^{10} \cdot 81 \cdot 729$.

4 Упростите выражение:

а) $7 \cdot 7^4 \cdot 7^5$;

б) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^5$;

в) $5 \cdot (-3)^3 \cdot 5^3 \cdot (-3)^5 \cdot 5^{11}$;

г) $11 \cdot 121 \cdot 11^3$;

д) $2^{100} \cdot 2^{50} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^{48}$;

е) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$;

ж) $(0{,}98)^2 \cdot (0{,}98)^5 \cdot (0{,}98)^{13}$;

з) $(11{,}45)^{345} \cdot (-11{,}45)^{55} \cdot (11{,}45)^{600}$.

5 Известно, что $7^5 = 16\,807$. Найдите:

а) 7^6; б) 7^4; в) 7^7.

6 Известно, что $19^4 = 130\,321$. Найдите:

а) 19^3; б) 19^6; в) 19^5.

7 Запишите частное в виде степени:

а) $a^5 : a^2$;

б) $g^{11} : g^7$;

в) $p^{20} : p^{15}$;

г) $q^3 : q$;

д) $y^{67} : y^{47}$;

е) $x^{121} : x^{88}$;

ж) $h^{1\,000} : h^{999}$;

з) $s^{4\,321} : s^{3\,087}$.

8 Найдите значение выражения:

а) $3^7 : 3^4$;

б) $7^{77} : 7^{75}$;

в) $11^{33} : 11^{30}$;

г) $2^{11} : 2^5$;

д) $59^{597} : 59^{596}$;

е) $1^{498} : 1^{77}$;

ж) $17^{11} : 17^9$;

з) $4^9 : 4^5$.

9 Найдите значение выражения:

а) $\frac{2^5 \cdot 2^7}{2^9}$;

б) $\frac{13^{10} \cdot 13^{14}}{13^{22}}$;

в) $\frac{5^8}{5^4 \cdot 5^2}$;

г) $\frac{9^{59} \cdot 9^{123}}{9^{179}}$;

д) $\frac{15^{15} \cdot 15^{51}}{15^{64}}$;

е) $\frac{54^{46} \cdot 54^{346}}{54^{391}}$;

ж) $\frac{3^{14\,641} \cdot 3^{133}}{3^{15\,970}}$;

з) $\frac{7^{23} \cdot 7^{232\,322}}{7^{232\,342}}$.

П

10 Запишите произведение в виде степени:

а) $(5x)^3\cdot(5x)^5$;

б) $(a+b)^{17}\cdot(a+b)^{13}$;

в) $(l+1+q)^{67}\cdot(l+1+q)^{79}$;

г) $(w+m)^{88}\cdot(w+m)^{61}$;

д) $(x-3)^4\cdot(x-3)^2$;

е) $(r+R)^{77}\cdot(r+R)^{19}$;

ж) $(2y)^{16}\cdot(2y)^3\cdot(2y)^{57}$;

з) $(13z)^{72}\cdot(13z)^{61}\cdot(13z)^{13}\cdot(13z)^{46}$.

11 Запишите произведение в виде степени:

а) $2\cdot4\cdot8\cdot16\cdot32\cdot64\cdot128$;

б) $3\cdot27\cdot729$;

в) $1\,331\cdot14\,641\cdot11$;

г) $5^{23}\cdot25\cdot5\cdot3\,125$;

д) $1\,296\cdot6\cdot7\,776$;

е) $32\,768\cdot2\cdot2^4$;

ж) $13^5\cdot28\,561\cdot2\,197$;

з) $67^3\cdot300\,763$.

12 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{3\cdot9\cdot27\cdot81\cdot729}{243\cdot2\,187}$;

б) $\dfrac{6^3\cdot2\cdot1\,024\cdot3\cdot59\,049}{2^8\cdot3^8}$;

в) $\dfrac{0{,}2\cdot0{,}0016\cdot0{,}000064}{0{,}04\cdot0{,}0000128}$;

г) $\dfrac{0{,}12\cdot0{,}001728}{0{,}0144}\cdot(0{,}12)^2$;

д) $\dfrac{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{32}{243}\cdot\dfrac{128}{2\,187}}{\dfrac{64}{729}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3}$;

е) $\dfrac{4^2\cdot4^3\cdot4^4\cdot4^5\cdot4^6\cdot4^7}{2^{44}}$;

ж) $\dfrac{3{,}1\cdot92{,}3521\cdot(3{,}1)^2}{29{,}791\cdot9{,}61}$;

з) $\dfrac{10\cdot10\,000\,000\,000\,000\cdot10^{20}}{100\,000\cdot10\,000\,000\cdot10^{18}}$.

13 Запишите частное в виде степени:

а) $(2m)^8:(2m)^3$;

б) $(a+b+c)^{123}:(a+b+c)^{35}$;

в) $\dfrac{(j+y)^{21}\cdot(j+y)^{92}}{(j+y)^{70}\cdot(j+y)^{26}}$;

г) $\dfrac{(k^2-t^2)^{64}}{(k^2-t^2)^{51}\cdot(k^2-t^2)^{11}}$;

д) $(x+1)^8:(x+1)^2$;

е) $\dfrac{(z-s)^{11}\cdot(z-s)^3\cdot(z-s)^{12}}{(z-s)^4\cdot(z-s)^{20}}$;

ж) $\dfrac{(n\cdot m)^{135}\cdot(n\cdot m)^{189}}{(n\cdot m)^{65}\cdot(n\cdot m)^{222}}$;

з) $(p+q\cdot r+s)^{1\,329}:(p+q\cdot r+s)^{1\,316}$.

14 Упростите выражения:

а) $a^3 \cdot a^x$;

б) $\dfrac{z^n \cdot z^{15-n} \cdot z^2 \cdot z^{30-2w}}{z^3 \cdot z^{17+w}}$;

в) $h^{12} \cdot h^{12-g} : h^{24-g}$;

г) $p^{10x} \cdot p^{100y} \cdot p^{1000z}$;

д) $\dfrac{f^k \cdot f^{2k} \cdot f^{4k} \cdot f^{8k} \cdot f^{16k} \cdot f^{64k}}{f^{32k} \cdot f^{60k}}$;

е) $p^{3k} \cdot p^{2k} : p^{4k}$;

ж) $\dfrac{(z-11)^2 \cdot (z-11)^{36a+192}}{(z-11)^{34a+112}}$;

з) $\dfrac{(d-e)^{u+v} \cdot (d-e)^{4u-v}}{(d-e)^{v-u}}$.

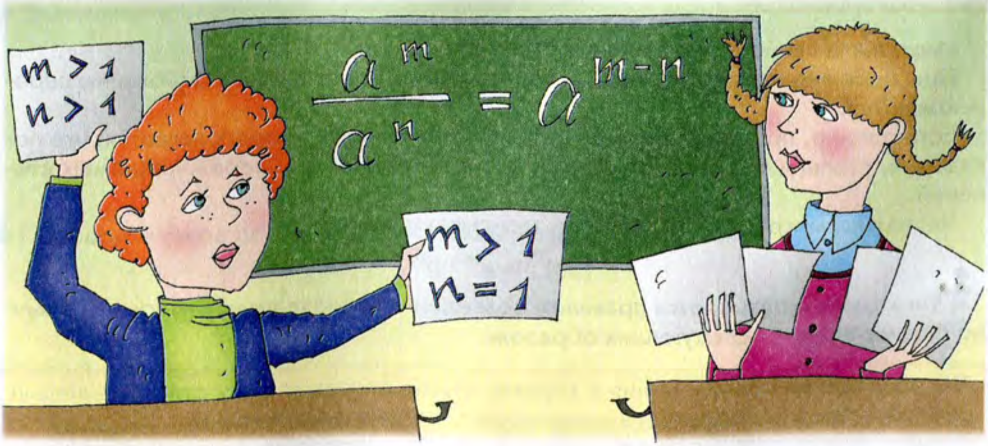
М

15 Семиклассники обсуждали доказательство формулы $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Валя сказал, что доказательство можно выполнить не так, как в учебнике, а по-другому: записать в числителе a^m, в знаменателе a^n, после чего сократить одинаковые множители. При этом, в отличие от доказательства формулы $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, где возможны четыре различных случая, здесь возможны только два различных случая: 1) $m > 1$; $n > 1$; 2) $m > 1$; $n = 1$. Варя возразила ему, сказав, что в предложенном Валей доказательстве тоже возможны четыре различных случая.

а) Попробуйте выполнить намеченное Валей доказательство.

б) Какие случаи могла иметь в виду Варя?

в) Как вы считаете, кто прав – Валя или Варя?



1.4 Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями. Возведение степени в степень

Умножение степеней с одинаковыми показателями

Открываем новые знания

- Закончите преобразования.

а) $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = \ldots$

б) $x^3 \cdot y^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (y \cdot y \cdot y) =$
$= (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = \ldots$

- Подберите такое основание, чтобы равенство было верным.

$5^2 \cdot 7^2 = (\quad)^2$; $p^4 \cdot q^4 = (\quad)^4$; $a^m \cdot b^m = (\quad)^m$.

- Обоснуйте свой ответ.

?! Как перемножить степени с одинаковыми показателями?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Для любых действительных чисел a и b и любого натурального числа m

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m.$$

При перемножении степеней с одинаковыми показателями основания степеней перемножаются, а показатель степени остаётся тем же.

Иногда это свойство формулируют ещё короче:

При перемножении степеней с одинаковыми показателями основания перемножаются.

Естественно, при такой краткой формулировке неявно предполагается, что показатель степени берётся тот самый, который одинаков у перемножаемых степеней.

Часто рассматриваемое свойство записывают в виде

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m.$$

При этом оно называется правилом возведения произведения в степень и обычно формулируется следующим образом.

Для возведения произведения в степень нужно возвести в эту степень каждый сомножитель в отдельности и перемножить полученные степени.

Для доказательства рассматриваемого свойства воспользуемся определением степени с натуральным показателем, а также переместительным и сочетательным свойствами операции умножения.

Если $m > 1$, то

$$(ab)^m = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{m} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{m} = a^m \cdot b^m,$$

и свойство для этого случая доказано.

Если $m = 1$, то

$$(ab)^m = (ab)^1 = ab = a^1 \cdot b^1 = a^m \cdot b^m,$$

и свойство для этого случая тоже доказано.

Таким образом, свойство полностью доказано.

Например: $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7 = 10\,000\,000$.

Рассматриваемое свойство справедливо также, когда количество сомножителей в произведении, возводимом в степень, больше двух. Например, для трёх множителей будем иметь:

$$(abc)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m,$$

для четырёх множителей будем иметь:

$$(abcd)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m \cdot d^m,$$

и т.д.

Деление степеней с одинаковыми показателями

Открываем новые знания

- Закончите преобразования:

а) $\dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \ldots$

б) $\dfrac{x^3}{y^3} = \dfrac{x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y} = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y} = \ldots$

- Подберите такое основание, чтобы равенство было верным:

$\dfrac{5^2}{7^2} = \left(\quad\right)^2$; $\dfrac{u^4}{v^4} = \left(\quad\right)^4$; $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\quad\right)^m$.

- Обоснуйте свой ответ.

?! Как выполняется деление степеней с одинаковым показателем?

Для любых действительных чисел a и b, причём $b \neq 0$, и любого натурального числа m

$$a^m : b^m = (a : b)^m,$$

или по-другому

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

При делении степеней с одинаковыми показателями основание степени делимого делится на основание степени делителя, а показатель степени остаётся тем же.

Иногда это свойство формулируют ещё короче:

При делении степеней с одинаковыми показателями основания делятся.

Естественно, при такой краткой формулировке предполагается, что делится основание степени делимого на основание степени делителя, а показатель степени берётся тот же, что и у степеней, которые делятся друг на друга.

Часто рассматриваемое свойство записывают в виде

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

При этом оно называется правилом возведения частного в степень или правилом возведения дроби в степень и обычно формулируется следующим образом.

Для возведения дроби в степень нужно возвести в эту степень числитель и записать в числителе, возвести в эту степень знаменатель и записать в знаменателе.

Иногда используется ещё более краткая формулировка.

Для возведения дроби в степень нужно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель.

Для доказательства рассматриваемого свойства воспользуемся определением степени с натуральным показателем, а также правилом перемножения дробей.

Если $m > 1$, то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{m} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{m}} = \frac{a^m}{b^m},$$

и свойство для этого случая доказано.

Если $m = 1$, то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a^m}{b^m},$$

и свойство для этого случая тоже доказано.

Таким образом, свойство полностью доказано.

Например:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256};\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\left(\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{2^5}{3^5} = -\frac{32}{243}.$$

Возведение степени в степень

Открываем новые знания

Закончите преобразования.

а) $(5^2)^3 = 5^2\cdot 5^2\cdot 5^2 = 5^{2+2+2} = \ldots$

б) $(x^6)^4 = x^6\cdot x^6\cdot x^6\cdot x^6 = x^{6+6+6+6} = \ldots$

Подберите такой показатель степени, чтобы равенство было верным.

$(6^3)^5 = 6^{\square}$; $(c^7)^1 = c^{\square}$; $(a^m)^n = a^{\square}$.

Обоснуйте свой ответ.

?! Как возвести степень в степень?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Для любого действительного числа a и любых натуральных чисел m и n

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

При возведении степени в степень основание остаётся прежним, а показатели степеней перемножаются.

Иногда это свойство формулируют ещё короче:

При возведении степени в степень показатели перемножаются.

Естественно, при такой совсем краткой формулировке предполагается, что основание остаётся прежним.

Для доказательства рассматриваемого свойства воспользуемся определением степени с натуральным показателем. Так же, как при доказательстве свойства произведения степеней с одинаковыми основаниями, нужно отдельно рассмотреть четыре случая: 1) $m > 1$; $n > 1$; 2) $m > 1$; $n = 1$; 3) $m = 1$; $n > 1$; 4) $m = 1$; $n = 1$.

1) Если $m > 1$ и $n > 1$, то

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots \cdot a^m}_{n} = a^{\overbrace{m+m+m+\ldots+m}^{n}} = a^{mn},$$

и свойство для этого случая доказано.

Остальные три случая предлагаем вам рассмотреть самостоятельно.

Развиваем умения

Н

1 Выполните возведение в степень:

а) $(a^3c^2)^9$;

б) $(x^3y^2z^5)^{11}$;

в) $(3g^7h^{13})^3$;

г) $(-y^{18}u^3)^{10}$;

д) $(-18w^{84}d^{11}f^{94})^2$;

е) $(-2u^2z^4)^5$;

ж) $(6s^{25}e^{23}m^{18})^4$;

з) $(2m^5n^4q^8p^{16})^4$.

2 Выполните действия:

а) $(-a^3b^2c)^3$;

б) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 \cdot \dfrac{y^3}{x^3}$;

в) $\dfrac{q^7w^8}{(qw)^7}$;

г) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{n}{k}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{k}{m}\right)^5$;

д) $(u^2vw)^2$;

е) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^3 \cdot (a^2b)^3 \cdot \dfrac{b}{a^3}$;

ж) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^7 \cdot \dfrac{1}{5^5} \cdot 2^5$;

з) $\dfrac{(2q^5w^7e^3)^4}{(2q^3w^6e^4)^3}$.

3 Представьте произведение в виде степени:

а) a^4b^4;

б) $a^3b^3c^3$;

в) $x^7y^{14}z^{21}$;

г) $49m^2$;

д) $243f^5g^{15}$;

е) $216h^3s^3$;

ж) $1\,024w^{10}q^{20}$;

з) $\frac{8}{27}l^6n^3$.

4 Найдите значение выражения:

а) $2^3 \cdot 5^3$;

б) $\left(\frac{7}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^5$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7$;

г) $\frac{(3^5)^7}{(3^7)^5} \cdot \frac{(5^3)^7}{(5^7)^3} \cdot \frac{(7^3)^5}{(7^5)^3}$;

д) $7^7 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$;

е) $\frac{8^5}{9^5} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^6 \cdot \frac{8}{9}$;

ж) $\left(\frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15}\right)^{11} \cdot \left(\frac{13}{8} \cdot \frac{15}{7}\right)^{12}$;

з) $\frac{12^{13}}{3^{13}4^{13}}$.

5 Возведите дробь в степень:

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$;

б) $\left(\frac{x}{2y}\right)^7$;

в) $\left(-\frac{11r}{12s}\right)^3$;

г) $\left(\frac{5}{m}\right)^3$;

д) $\left(\frac{2}{4t}\right)^{10}$;

е) $\left(-\frac{3}{r^2}\right)^4$;

ж) $\left(\frac{p}{-6q}\right)^3$;

з) $\left(\frac{2u}{3j}\right)^7$.

6 Найдите степень дроби:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$;

б) $\left(\frac{7}{6}\right)^2$;

в) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$;

г) $\left(\frac{16}{11}\right)^2$;

д) $\left(\frac{1}{2}\right)^7$;

е) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$;

ж) $\left(\frac{6}{4}\right)^4$;

з) $\left(\frac{13}{14}\right)^2$.

7 Представьте в виде степени:

а) $\frac{m^5}{n^5}$;

б) $\frac{x^6}{7^6}$;

в) $\frac{256x^8}{y^{16}}$;

г) $\frac{z^{11}t^{11}}{h^{11}}$;

д) $\frac{81}{625c^4}$;

е) $\frac{32}{t^5}$;

ж) $\frac{2^{12}k^{12}}{l^{24}}$;

з) $\frac{15^5f^5}{17^5g^5}$.

8 Найдите значение выражения:

а) $\frac{12^5}{6^5}$;

б) $\frac{8^{10}}{4^{15}}$;

в) $\frac{21^3}{27^3}$;

г) $\frac{10^{1000} \cdot 36^5}{2^{1000} \cdot 5^{1000} \cdot 18^5}$;

д) $\frac{4^{20}}{(2^{10})^2}$; е) $\frac{5^4}{15^4}$; ж) $\frac{241^3}{482^3}$; з) $\frac{81^5 \cdot 16^{10}}{6^{20} \cdot 2^{20}}$.

9 Запишите в виде степени с основанием a:

а) $(a^3)^3$;

б) $a^{11} \cdot (a^2 \cdot a^4)^7$;

в) $(a^5)^4 \cdot (a^4)^5$;

г) $a^7 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^5$;

д) $((a^2 \cdot a^3)^3)^4$;

е) $(a^2)^5 \cdot a^3$;

ж) $\frac{(a^5)^2 \cdot (a^{12})^3}{(a^2)^{10}}$;

з) $(a^3 : (a^3)^2)^2 \cdot (a^4)^5$.

Н

10 Запишите в виде степени с основанием 3:

а) 9^3; б) 27^4; в) $27 \cdot 81 \cdot 243$; г) $729 \cdot 9^{10} \cdot 3^{13}$; д) $2\,187 \cdot 3 \cdot 9^3$; е) $9^5 \cdot 27$; ж) $((3^3)^3)^3$; з) 27^{27}.

11 Найдите значение выражения:

а) $\frac{3^7 \cdot 2^7}{6^5}$;

б) $\frac{2^{30} \cdot 3^{15}}{12^{13}}$;

в) $\frac{7^6 \cdot 8^5}{7^4 \cdot 2^{13}}$;

г) $\frac{15^6}{5^6 \cdot 3^5}$;

д) $\frac{120^{17}}{2^{50} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}}$;

е) $\frac{21^5}{7^4 \cdot 3^4}$;

ж) $\frac{18^5}{2 \cdot 6^4 \cdot 3^6}$;

з) $\frac{10^{22} \cdot 2^{20}}{20^{20}}$.

П

12 Представьте произведение в виде степени:

а) a^4b^8; б) $a^3b^6c^9$; в) $q^{15}w^{30}r^{45}$; г) $49m^6$; д) $343s^{21}$; е) $121d^{20}g^{60}$; ж) $196h^{10} \cdot 144$; з) $13^{13}f^{13}h^{169}$.

13 Возведите дробь в степень:

а) $\left(\frac{a-1}{b}\right)^3$; д) $\left(\left(\frac{y^2}{z^3}\right)^2\right)^4$;

б) $\left(-\frac{g-G}{G-g}\right)^{121}$; е) $\left(-\frac{x+y}{x-y}\right)^4$;

в) $\left(\frac{h^3\cdot q^2}{(h+q)^3}\right)^4$; ж) $\left(\frac{w^6}{w+1}\right)^{17}$;

г) $\left(\frac{2n}{m}\right)^5$; з) $\left(\frac{n^3m^4}{n^5m^3}\right)^6$.

14 Представьте в виде степени:

а) $\frac{8m^3}{27n^3}$; в) $\frac{0{,}0016}{x^4}$; д) $\frac{121f^{10}}{144g^{20}}$; ж) $\left(\frac{25}{36}k^4\right):\left(\frac{400}{361}c^4\right)$;

б) $\frac{x^6}{125}$; г) $\frac{0{,}125w^3}{2{,}197r^3}$; е) $\frac{16x^8}{t^4}$; з) $\frac{625u^{62}}{j^{122}}$.

15 Вычислите:

а) $\frac{12^5\cdot 2^5}{3^5\cdot 8^5}$; д) $\frac{5\,400^3}{2^6\cdot 9\cdot 15^4}$;

б) $\frac{0{,}01\cdot 0{,}001}{0{,}00001}$; е) $\frac{(10\cdot 9\cdot 8)^{17}}{(2\cdot 3\cdot 5)^{17}\cdot 2^{34}\cdot 6^{17}}$;

в) $\left(\frac{2}{17}\right)^3\cdot 17^3\cdot 0{,}125$; ж) $\left(\frac{4}{3}\right)^5\cdot 0{,}75^6$;

г) $\frac{6^7\cdot 2^7}{3^6\cdot 4^6}$; з) $\left(\left(\frac{21}{22}\right)^{12}\cdot\left(\frac{11}{7}\right)^{12}\right)^2\cdot\frac{2^{24}}{3^{24}}$.

М

16 Семиклассник Вася придумал правило возведения в степень выражения, содержащего только операции умножения и деления: нужно выписать те же знаки операций, но только каждое число заменить его степенью. Например, $(a\cdot b:c)^m = a^m\cdot b^m:c^m$, $(a:b:c\cdot d)^m = a^m:b^m:c^m\cdot d^m$ и т.д. Верно ли придуманное Васей правило? Обоснуйте свой ответ.

Знакомимся с новой темой

В этом параграфе мы познакомимся с самыми простыми алгебраическими выражениями – *одночленами*.

Одночленом называется выражение, представляющее собой произведение чисел и переменных. Поскольку произведение нескольких одинаковых сомножителей можно записать в виде степени, можно сказать и по-другому: одночлен – произведение чисел, переменных и их степеней.

Примеры одночленов:

$$mn,\ 5abc,\ 3x^2\cdot(-4{,}8)y,\ 9abac,\ \frac{2}{3}p^3q^5.$$

Число или отдельная буква тоже является одночленом. Например, одночленами являются следующие алгебраические выражения:

$$a;\ x;\ m;\ 75;\ 1;\ \frac{5}{6};\ -4;\ 0.$$

Число 0 называют *нулевым одночленом*.

Используя свойства операции умножения и свойства степеней, одночлены можно записывать в разных видах. Так, третий одночлен из рассмотренного выше примера можно записать в виде $(-14{,}4)x^2y$, или в виде $-1{,}6x\cdot 9yx$, а четвёртый – в виде $9a^2bc$, или в виде $2ab\cdot 3ac$, или в виде $cba\cdot 9a$. Каждый из этих одночленов можно записать также и в других видах.

Среди различных видов записи одного и того же одночлена чаще всего используется вид, называемый *стандартным видом*.

Одночлен стандартного вида содержит только один числовой множитель, который записывается на первом месте, и степени разных переменных.

Примеры:

$$7m^2n^3k,\ \frac{5}{6}a^6bc,\ -4x^3y,\ 9abcd,\ 422p.$$

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называется *коэффициентом* этого одночлена.

Например, коэффициентами записанных выше одночленов являются соответственно числа 7; $\frac{5}{6}$; −4; 9; 422.

Одночлен с коэффициентом 1 обычно записывается без числового множителя 1. Скажем, очень редко пишут $1ab^3c$, преимущественно пишут ab^3c.

Одночлен с коэффициентом −1 обычно записывается не с числовым множителем −1, а просто со знаком «−». Очень редко пишут, например, $(-1)x^4y^5$ или $-1x^4y^5$, а преимущественно пишут $-x^4y^5$.

Говорить о коэффициенте многочлена можно только после записи его в стандартном виде.

Одночлен представляет собой произведение коэффициента и буквенной части.

Например, у одночлена $34a^2bc$ коэффициент 34, а буквенная часть a^2bc, у одночлена x коэффициент 1, а буквенная часть x.

Буквы, образующие буквенную часть одночлена стандартного вида, удобно (хотя и совершенно не обязательно!) записывать в алфавитном порядке.

Буквенная часть одночлена может отсутствовать. Напомним, что число тоже одночлен. Например, у одночлена $\frac{12}{7}$ коэффициент $\frac{12}{7}$, а буквенная часть отсутствует.

Степенью одночлена называется сумма степеней всех входящих в него букв.

Например, в одночлен $8a^2bc^3$ буква a входит в степени 2, буква b входит в степени 1, а буква c входит в степени 3. Так как $2 + 1 + 3 = 6$, то степень этого одночлена равна 6.

Одночлен, представляющий собой действительное число, не равное нулю, имеет нулевую степень. Степень нулевого одночлена, т.е. числа 0, не определена, т.е. считается, что он не имеет никакой степени.

Развиваем умения

Н

1 Какие из алгебраических выражений являются одночленами:

а) $8a^2bc^3d$;

б) $a + 5$;

в) $-x^4y^5$;

г) 2 012;

д) $7{,}567x \cdot 456{,}56y$;

е) $3fgh + j$;

ж) $-44w^{300}w^6$;

з) 0?

2 Определите, какие из одночленов имеют стандартный вид:

а) $8a^2bc^3ba$;

б) $-x^4y^55z$;

в) $mnkl$;

г) 0;

д) $34x \cdot 37y$;

е) $-12abcx^3y^{24}$;

ж) -267;

з) $5{,}45675667x$.

3 Запишите одночлен в стандартном виде:

а) $8a^5bc^24bc$;

б) $mnklm$;

в) $\frac{-1}{2^{20}}x^{10}2^{21}y^{11}$;

г) $2q \cdot 3w \cdot 4e \cdot 5r \cdot 6t \cdot 7y$;

д) $12{,}2g^{21} \cdot 6{,}5h^9$;

е) $5d \cdot \frac{1}{5}d \cdot 3$;

ж) $7w^7\ (-8q^9)$;

з) $y^{14} \cdot 5 \cdot x^{23} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

4 Найдите значение одночлена при указанных значениях букв:

а) $-4x^4y^2z$ при $x = -1$; $y = 3$; $z = 0{,}5$;

б) $25a^2x^3t^4$ при $a = -2$; $x = 1$; $t = \frac{1}{2}$;

в) $-13{,}5rR^2w^2W$ при $r = -\frac{1}{81}$; $R = 2$; $w = -2$; $W = -5$;

г) $66k^4t^5$ при $k = 3$; $t = \frac{1}{3}$.

5 Стандартный ли вид имеет одночлен:

а) $2xc^2db$;

б) $\frac{21}{-234}xr^4$;

в) $(11 - 54)x$;

г) -675;

д) $44x \cdot 3$;

е) $212xXyYzZ$;

ж) 0;

з) $p^{45}q^{45}j^{45}frtw^{22}$?

6 Определите коэффициент одночлена:

а) $-m^6n^5$;

б) $-138{,}99$;

в) $(-12x) \cdot (-12x)$;

г) $-37x^3a^4b \cdot \frac{-5}{37}$;

д) 0;

е) $-123g$;

ж) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{4} \cdot \frac{s}{16} \cdot \frac{q}{32} \cdot \frac{h}{64}$;

з) $\frac{8}{25}n \cdot \frac{9}{20}m \cdot 250$.

7 Определите степень одночлена:

а) $2ac^2h^4$; д) 0;

б) $-98{,}001$; е) 178;

в) $-345a^2g^{234}f^{34}s^{34}$; ж) $11(x^2y^3)^4$;

г) $231g^{12}h^{13}q^2$; з) $ab^2cd^2ef^2gh^2j$.

П

8 Выпишите в стандартном виде все одночлены пятой степени с переменными m и n и коэффициентом 5. Сколько одночленов вы выписали? Сколько среди них равных друг другу?

9 Выпишите в стандартном виде все различные одночлены шестой степени с переменными m и n и коэффициентом 2. Сколько одночленов вы выписали?

1.6 Умножение одночленов и возведение одночлена в натуральную степень

Знакомимся с новой темой

Любые два одночлена можно перемножить, и в результате получится одночлен. При умножении одночленов применяют переместительный и сочетательный законы умножения и правило умножения степеней с одинаковыми основаниями.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Перемножим одночлены $2a^2bc$ и $7a^3c^3$.

Имеем:

$$(2a^2bc)\cdot(7a^3c^2)=2a^2bc\cdot 7a^3c^2=(2\cdot 7)\cdot(a^2\cdot a^3)\cdot b\cdot(c\cdot c^2)=14a^5bc^3.$$

Мы переставили сомножители и сгруппировали между собой коэффициенты и степени тех букв, которые содержатся в обоих одночленах (a и c). Затем мы перемножили коэффициенты, а при перемножении между собой степеней a и при перемножении между собой степеней c применили правило перемножения степеней с одинаковыми основаниями.

2) Найдём произведение трёх одночленов: $-9m^2n$, $\frac{4}{3}m^3n^4$ и $2m^3$. Будем сразу группировать между собой коэффициенты и степени одинаковых букв.

Имеем:

$$(-9m^2n)\cdot\left(\frac{4}{3}m^3n^4\right)\cdot(2m^3)=\left(-9\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\right)\cdot(m^2\cdot m^3\cdot m^3)\cdot(n\cdot n^4)=-24m^8n^5.$$

Степень произведения ненулевых одночленов равна сумме степеней перемножаемых одночленов.

В первом из рассмотренных выше примеров степень одночлена $2a^2bc$ равна 4, степень одночлена $7a^3c^3$ равна 5, а степень их произведения, одночлена $14a^5bc^3$, равна 9.

Во втором из рассмотренных примеров степени одночленов-сомножителей равны соответственно 3; 7 и 3, а степень их произведения равна 13.

Любой одночлен можно возвести в степень с натуральным показателем, и в результате получится одночлен. При возведении одночлена в степень применяют правило возведения произведения в степень и правило возведения степени в степень.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Возведём одночлен $-4a^2b^3c$ в квадрат.

Имеем:

$$(-4a^2b^3c)^2=(-4)^2\cdot(a^2)^2\cdot(b^3)^2\cdot c^2=16a^4b^6c^2.$$

2) Найдём пятую степень одночлена $\frac{2}{3}x^3y^4$.

Имеем:

$$\left(\frac{2}{3}x^3y^4\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot(x^3)^5\cdot(y^4)^5=\frac{32}{243}x^{15}y^{20}.$$

При возведении (ненулевого) одночлена степени k в n-ю степень получится одночлен степени kn.

В первом из рассмотренных выше примеров степень одночлена $-4a^2b^3c$ равна 6, а степень его квадрата (2-й степени) $16a^4b^6c^2$ равна 12.

Во втором из рассмотренных примеров при возведении одночлена 7-й степени в 5-ю степень получили одночлен 35-й степени.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложения.

а) Степень произведения ненулевых одночленов равна …

б) Коэффициент произведения ненулевых одночленов равен …

в) При возведении одночлена в степень его коэффициент …

г) При умножении ненулевого одночлена на нулевой одночлен степень полученного одночлена равна …, а его коэффициент равен …

д) Степень ненулевого одночлена не изменится, если его умножить на ненулевой одночлен степени …

2 Произведение двух одночленов является одночленом третьей степени. Какие степени могли иметь одночлены-сомножители?

3 Найдите произведение одночленов:

а) $3ab^3$ и $4a^4b$;

б) x^2y^3 и y^3x^2;

в) $\frac{2}{5}a^2bx^2yh$ и $-5ah^3$;

г) $-\frac{5}{19}d^6s^2q^3$ и $-38xs^7q$;

д) $8a^2bc^3d$ и $-6ab^3d^2$;

е) $21p^{18}$ и $21p^5$;

ж) $\frac{1}{2^{200}}f^{21}g^{17}$ и $2^{202}f^4g^8$;

з) 24 и $11x^2yz^2$.

4 Возведите одночлен в степень:

а) $(3a^2b)^2$;

б) $\left(-\frac{5}{6}xyz\right)^3$;

в) $\left(\frac{5}{4}n^4m^3z^3k^4\right)^2$;

г) $\left(-\frac{5}{7}s\cdot\frac{3}{5}qgd\right)^3$;

д) $(2qg)^{10}$;

е) $(8rt^2a^2b)^3$;

ж) $\left(\frac{5}{4}n^4m^3z^3k^4\right)^2$;

з) $(0{,}1x^2y^4z^3)^5$.

Н

5 Запишите в виде одночлена стандартного вида:

а) $(8x^3)^3$;

б) $(2x^2y^3)^2\cdot\left(\frac{1}{3}x^3yz\right)^3$;

в) $((3f)^2r)^2gh\cdot\frac{1}{81}$;

г) $5h^{10}\cdot(g^2(q^2w^3r^4)^2)^3\cdot(-2)$;

д) $y^{10}\cdot10\cdot20\cdot30\cdot l^{28}\cdot40\cdot w$;

е) $r\cdot4\cdot r\cdot5\cdot r$;

ж) $(2h^2)^{17}\cdot\frac{z}{2^{17}}y$;

з) $a^{56}b^{10}\cdot(-5d)$.

6 Запишите в виде квадрата одночлена:

а) $4a^2b^4$;

б) $81z^{20}$;

в) $289v^{34}f^2$;

г) $9t^{200}$;

д) $10^{1\,000}k^{1\,000}$;

е) $144z^4b^8m^{16}$;

ж) $\frac{121}{289}y^{22}$;

з) $0{,}0001s^2$.

7 Запишите в виде куба одночлена:

а) $8a^3b^3$;

б) $-343z^3y^6$;

в) $-a^9b^3$;

г) $17^6u^{33}w^{66}$;

д) $0{,}001m^{15}n^3$;

е) $\frac{729}{13^3}j^{99}$;

ж) $-27r^{12}k^{18}$;

з) $1\,000q^6d^{102}$.

8 Запишите в виде пятой степени одночлена:

а) $32a^{10}b^{15}$;

б) $-243x^{1\,000}y^{2\,000}$;

в) $1\,024h^{85}g^{80}$;

г) $0{,}00001r^{1\,880}s^{1\,170}$.

П

9 Запишите в виде квадрата одночлена несколькими способами:

а) $36a^2b^4$;

б) $144x^8y^4$;

в) $81x^6$;

г) $2^{56}g^{56}$.

Сколько способов вам удалось найти?

10 Семиклассник Вася утверждает, что степень произведения двух одночленов всегда равна сумме степеней одночленов-сомножителей, а его одноклассник Валя утверждает, что утверждение Васи неверно. Как вы считаете, кто прав – Вася или Валя? Обоснуйте свой ответ.

11 Какой степенью одночлена $7x^4y^2z$ является одночлен $117\,649x^{24}y^{12}z^6$?

12 Какой степенью одночлена $\frac{3}{4}a^2b^{13}c^{23}d$ является одночлен $\frac{177\,147}{4\,194\,304}a^{22}b^{143}c^{253}d^{11}$?

13 Запишите в виде одночлена стандартного вида:

а) $(3x^4)^3\cdot 5xy^2$;

б) $5\cdot(2\cdot u^3v)^5\cdot v^5\cdot 2$;

в) $13^6\cdot\left(\frac{1}{13}x\right)^5\cdot x^3y^{45}\cdot(-13z)$;

г) $10\cdot(0{,}01x\cdot 100y)^{200}\cdot z^{200}$;

д) $\left(\left((fg^2h)^2j\right)^3k\right)^4$;

е) $x\cdot 12^{12}\cdot\left(\frac{k}{12^4}\right)^3\cdot\frac{l^3}{3}$;

ж) $19^{123}\cdot\left(-\frac{a}{19}\right)^{122}\cdot(-19b)^{123}\cdot\left(-\frac{c}{19}\right)^{124}$;

з) $10^{142}\cdot\left(\left(\frac{w}{5}\right)^{11}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^{12}\right)^{13}\cdot 2^{13}$.

14 Некоторый одночлен является квадратом одночлена и кубом одночлена. Можно ли утверждать, что он является шестой степенью одночлена? Обоснуйте свой ответ.

15 Некоторый одночлен является квадратом одночлена и четвёртой степенью одночлена. Можно ли утверждать, что он является восьмой степенью одночлена? Обоснуйте свой ответ.

М

16 Докажите, что степень произведения ненулевых одночленов равна сумме степеней перемножаемых одночленов.

17 Докажите, что при возведении одночлена степени k в n-ю степень (где k и n – натуральные числа) получится одночлен степени kn.

1.7 Деление одночлена на одночлен

Знакомимся с новой темой

Операция деления одночлена на одночлен вводится аналогично тому, как вводилась операция деления для чисел.

Говорят, что одночлен A делится на одночлен B, если найдётся такой одночлен C, произведение которого с одночленом B равно одночлену A. Одночлен C называется частным одночленов A и B.

Например, одночлен $3a^2b$ является частным одночленов $15a^3b^3c^2$ и $5ab^2c^2$, т.к. произведение одночленов $3a^2b$ и $5ab^2c^2$ равно

$$(3a^2b)\cdot(5ab^2c^2) = (3\cdot 5)\cdot(a^2\cdot a)\cdot(b\cdot b^2)\cdot c^2 = 15a^3b^3c^2,$$

т.е. одночлену $15a^3b^3c^2$.

Тот факт, что одночлен $3a^2b$ является частным одночленов $15a^3b^3c^2$ и $5ab^2c^2$, можно записать с помощью двоеточия:

$$(15a^3b^3c^2):(5ab^2c^2) = 3a^2b$$

и можно записать с помощью дробной черты:

$$\frac{15a^3b^3c^2}{5ab^2c^2}=3a^2b\ .$$

Кратко можно сказать так: A делится на B, если $A = BC$ (где A, B, C – одночлены).

Делить на нулевой одночлен нельзя!

При делении одночлена на одночлен применяются свойства действий с дробями и правило деления степеней с одинаковыми основаниями.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Разделим одночлен $-32x^4y^2z^3$ на одночлен $8x^2yz^3$. Удобно записать частное с помощью дробной черты, после чего воспользоваться свойствами действий с дробями. Получим:

$$\frac{-32x^4y^2z^3}{8x^2yz^3}=\frac{-32}{8}\cdot\frac{x^4}{x^2}\cdot\frac{y^2}{y}\cdot\frac{z^3}{z^3}.$$

Мы записали произведение четырёх дробей, в первую из которых вошли коэффициенты, во вторую – степени x, в третью – степени y, в четвёртую – степени z. Теперь сократим первую дробь на 8, во второй и третьей дробях применим правило деления степеней с одинаковыми основаниями, а четвёртая дробь равна 1, т.к. её числитель и знаменатель одинаковые. Получим далее:

$$\frac{-32x^4y^2z^3}{8x^2yz^3}=\frac{-32}{8}\cdot\frac{x^4}{x^2}\cdot\frac{y^2}{y}\cdot\frac{z^3}{z^3}=-4\cdot x^{4-2}\cdot y^{2-1}\cdot 1=-4x^2y.$$

2) Найдём частное одночленов $9p^3qr^4s^2$ и $12p^2r^2$:

$$\frac{9p^3qr^4s^2}{12p^2r^2}=\frac{9}{12}\cdot\frac{p^3}{p^2}\cdot q\cdot\frac{r^4}{r^2}\cdot s^2=\frac{3}{4}\cdot p^{3-2}\cdot q\cdot r^{4-2}\cdot s^2=\frac{3}{4}pqr^2s^2.$$

Степень частного ненулевых одночленов равна разности степеней одночлена-делимого и одночлена-делителя.

В первом из рассмотренных выше примеров степень одночлена $-32x^4y^2z^3$ равна 9, степень одночлена $8x^2yz^3$ равна 6, а степень их частного, одночлена $-4x^2y$, равна 3.

Во втором из рассмотренных примеров степени одночлена-делимого и одночлена-делителя равны соответственно 10 и 4, а степень их частного равна 6.

Имеется определённая аналогия между операциями умножения и деления одночленов и операциями умножения и деления целых чисел. Вы знаете, что произведение любых целых чисел является целым числом, а частное некоторых целых чисел целым числом не является, например частное 5 и 3. Теперь вы знаете, что частное целых чисел 5 и 3 является дробью $\frac{5}{3}$. Но было время, когда вы ещё не были знакомы с дробями, и тогда вы говорили, что целое число 5 не делится на целое число 3, имея в виду, что не существует такого целого числа, произведение которого с целым числом 3 равнялось бы целому числу 5.

Очень похожая ситуация с операциями умножения и деления одночленов. Произведение любых двух одночленов является одночленом. Иногда говорят: «Любые два одночлена можно перемножить», имея в виду, что полученное произведение будет одночленом. А вот разделить одночлен на одночлен можно не всегда. Например, нельзя разделить одночлен $3a^4b$ на одночлен a^2b^2, т.к. не существует такого одночлена, произведение которого с одночленом a^2b^2 равнялось бы одночлену $3a^4b$. Нельзя разделить одночлен $8xyz$ на одночлен pq и т.д.

Ситуация с делением таких одночленов уточнится в курсе алгебры 8-го класса, когда вы будете изучать алгебраические дроби. Выяснится, что частное упомянутых выше одночленов $3a^4b$ и a^2b^2 является алгебраической дробью (как и частное одночленов $8xyz$ и pq). Вспомните рассмотренный выше пример с делением целого числа 5 на целое число 3. Здесь имеется очень тесная аналогия.

Но сейчас, пока мы не знаем алгебраических дробей, важно выяснить, при каких условиях один одночлен делится на другой.

Одночлен делится на одночлен, если показатель степени каждой буквы одночлена-делимого не меньше показателя степени этой буквы у одночлена-делителя. Это, в частности, предполагает, что в одночлене-делителе нет букв, которые отсутствуют в одночлене-делимом.

Например, одночлен $3a^4b$ из первого рассмотренного выше примера не делится на одночлен a^2b^2, т.к. показатель степени буквы b в одночлене-делимом (он равняется 1) меньше показателя степени буквы b в одночлене-делителе (он равняется 2). Одночлен $8xyz$ из второго рассмотренного выше примера не делится на одночлен pq, т.к. в одночлене-делителе имеются буквы (p и q), которые отсутствуют в одночлене-делимом.

В то же время одночлен $\frac{5}{7}m^3n^4k$ делится на одночлен $9m^3n^2$, т.к. все буквы, содержащиеся в одночлене-делителе, присутствуют в одночлене-делимом, причём с показателями степени не меньшими, чем в одночлене-делителе. Убедитесь самостоятельно, что частным этих одночленов является одночлен $\frac{5}{63}n^2k$.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложения.

а) Частным двух одночленов является ...

б) Степень частного ненулевых одночленов равна ...

в) Коэффициент частного ненулевых одночленов равен …

г) Говорят, что одночлен A делится на одночлен B, если …

2 Известно, что A и B – одночлены, причём B – ненулевой одночлен. Обязательно ли существует такой одночлен C, что $A = BC$?

3 а) При каком условии существует частное двух одночленов?

б) Как найти частное двух одночленов (при условии, что оно существует)?

4 а) Может ли степень частного двух одночленов быть больше степени делимого?

б) Может ли степень частного двух одночленов быть равна степени делимого?

5 а) Может ли степень частного двух одночленов быть больше степени делителя?

б) Может ли степень частного двух одночленов быть равна степени делителя?

6 Существует ли частное одночленов:

а) $3a^2b^3$ и $4ab$;

б) $67f^3z^4g$ и $56f^5z^4g$;

в) $21m^5nk$ и $87h^4j^7$;

г) $-11c^9xs^6$ и $12c^3s^2$;

д) $8a^2bc^3d^3$ и $-3ab^3d^2$;

е) $325w^4q^3l^2$ и 128;

ж) 189 и $23x$;

з) $78g^4h^2$ и $-13h^2g$?

7 Найдите частное одночленов:

а) a^4 и a^3;

б) h^{15} и $3h^{13}$;

в) $3u^7z$ и u^2z;

г) $-7d^7$ и $-d^4$;

д) $2a^2b^3$ и ab;

е) kl^2m и klm;

ж) $-55g^{58}$ и $11g^{50}$;

з) $32c^{10}$ и $2c^7$.

8 Найдите частное одночленов:

а) a^4b^3 и $4a^4b$;

б) $x^7y^4z^3$ и x^2y^3z;

в) $4q^6h^6w^3s$ и $2q^2h^2w^2$;

г) $-23e^{12}l^{13}a^3$ и $21e^3a$;

д) $-5a^2bc^3$ и $-6abc^2$;

е) $11s^2g^2v^{13}$ и $7sg^2v^5$;

ж) $27f^{20}g^{30}j^{22}$ и $36f^7g^{27}j^{16}$;

з) $-12v^3h^3d^2x$ и $-8vh^2x$.

Н

9 Выполните деление:

а) $(10a^4b^2) : (5a^3)$;

б) $(-23k^{17}s^9u^7) : (19k^5s^2u^3)$;

в) $(10p^{21}r^{26}v^{20}) : (13p^{17}r^{22}v^3)$;

г) $(12a^3b^2c^2) : (4b^2c)$;

д) $(22k^{25}m^{26}) : (13k^2m^{13})$;

е) $(-35a^{23}k^{24}) : (-11ak^4)$;

ж) $(54a^{11}b^{14}) : (-18ab^4)$;

з) $(24a^{13}k^{29}p^{22}s^{16}) : (-6a^3k^{15}p^{12}s^{12})$.

10 Упростите выражения:

а) $(3a^4b^2)^2 : (a^3b)$;

б) $(24a^{14}g^8j^9)^2 : (16a^{11}g^3j^4)^2$;

в) $(9m^{16}u^{46}v^{19})^2 : (-6m^3u^{14}v^2)^3$;

г) $(-3b^{14}f^4)^5 : (-7b^{16}f^2)^4$;

д) $(4j^{15}s^{51})^4 : (2j^7s^{18})^7$;

е) $(-2a^4b)^3 : (3a^3b)^2$;

ж) $(-5p^9t^{321})^3 : (-t^{29})^{11}$;

з) $(9e^6g^{17}m^{16})^3 : (-4e^8g^{16}m^{14})^2$.

11 Упростите выражения:

а) $(3a^4b^2) \cdot (-2abc) : (a^3bc)$;

б) $(-5c^{20}l^{13}) \cdot (10c^{16}l^{11}y^{15}) : (2c^2y^5)$;

в) $(5p^{13}v^3w^{14}) : (9v^8w^{10}) \cdot (-9p^7v^{16})$;

г) $(-3u^4s^5) \cdot (5s^{16}w^{17}) : (-3u^2s^{13}w^{14})$;

д) $(-4f^{10}y^7) \cdot (-7f^{15}m^{17}y^{19}) : (-2f^3y^{11})$;

е) $(7a^5b^2) : (3a^4b) \cdot (6b^2x)$;

ж) $(-6a^{11}j^{15}u^{14}) : (-5a^3u^3) \cdot (3j^7u^2)$;

з) $(4t^6w^9y^{18}) : (4t^2w^2y^2) \cdot (-tw)$.

12 Найдите такой одночлен A, для которого выполняется равенство:

а) $A \cdot (3xy) = -6x^3y^2$;

б) $A \cdot (-7s^{10}t^{19}) = 10s^{18}t^{21}$;

в) $(4x^2y) \cdot A = 5x^4yz$;

г) $(4p^5s^{13}) \cdot A = 9e^{16}p^9s^{17}$;

д) $A \cdot (-9m^6r^8) = -9m^7r^9y^{15}$;

е) $(s^7z^{16}) \cdot A = -10hs^{11}z^{27}$;

ж) $A \cdot (10c^{16}f^{16}x^9) = 9c^{17}f^{17}x^{10}$;

з) $(-3j^4r^3x^4) \cdot A = 8b^4j^{14}r^9x^8$.

П

13 Известно, что A и B – ненулевые одночлены. Может ли быть так, что одночлен A делится на одночлен B и в то же время одночлен B делится на одночлен A? Если да, то выясните, при каком условии. Если нет, то объясните почему.

14 Известно, что одночлен A делится на одночлен B, а одночлен B делится на одночлен C. Обязательно ли одночлен A делится на одночлен C? Обоснуйте свой ответ.

М

15 Докажите, что степень частного ненулевых одночленов равна разности степеней одночлена-делимого и одночлена-делителя.

1.8 Подобные одночлены. Сложение и вычитание подобных одночленов

Знакомимся с новой темой

Два ненулевых одночлена стандартного вида называются подобными, если они одинаковые или отличаются только коэффициентами.

Можно сказать и так:

Два одночлена подобны, если их буквенные части одинаковы.

Например, одночлены $19x^3y$ и $4x^3y$ подобны, т.к. их буквенные части одинаковы (буквенной частью каждого из них является x^3y). Подобными являются также одночлены $2{,}3t^3u^2vw^5$ и $-\frac{1}{3}t^3u^2vw^5$. А вот одночлены $11mn^2k$ и $-1{,}24m^2n^2k$ не подобны, т.к. их буквенные части (mn^2k и m^2n^2k) не одинаковы.

В частности, одночлен считается подобным самому себе (можно сказать и по-другому: «одночлен подобен равному ему одночлену»).

Выяснение, подобны или нет два одночлена стандартного вида, будет более быстрым и удобным, если их буквенные множители записать в одинаковом порядке, например в алфавитном.

Рассмотрим для примера одночлены $0{,}9a^2b^4cd^5$ и $7ca^2d^5b^4$. Для нахождения ответа на вопрос, подобны они или нет, требуются определённые усилия, скажем, можно подчёркивать одинаковым количеством чёрточек степени одинаковых букв. Но если записать второй из одночленов в виде $7a^2b^4cd^5$, т.е. расположив его буквенные множители в алфавитном порядке, то подобие одночленов сразу становится заметным.

Подобными могут быть не только два одночлена, но и большее их количество: три, четыре и т.д. Например, подобными являются три одночлена: $-7pgr^2s^3$, $\frac{5}{12}pqr^2s^3$ и $-3{,}12pgr^2s^3$.

Если одночлены не имеют стандартного вида, нужно сначала записать их в стандартном виде, а затем выяснять, являются ли они подобными или нет.

Для подобных одночленов можно определить их сумму и разность.

Это определение основано на известном вам распределительном свойстве умножения относительно сложения и вычитания (называемом также правилом вынесения общего множителя за скобку).

Например, для самых первых из рассмотренных в этом параграфе подобных одночленов $19x^3y$ и $4x^3y$ можно записать их сумму, а затем вынести за скобку (удобнее справа) общий множитель x^3y. Получим:

$$19x^3y + 4x^3y = (19 + 4) \cdot x^3y = 23x^3y.$$

Можно также записать разность этих же подобных одночленов $19x^3y$ и $4x^3y$, а затем вынести за скобку (справа) общий множитель x^3y. Получим:

$$19x^3y - 4x^3y = (19 - 4) \cdot x^3y = 15x^3y.$$

Таким образом, суммой подобных одночленов $19x^3y$ и $4x^3y$ является одночлен $23x^3y$, а разностью подобных одночленов $19x^3y$ и $4x^3y$ является одночлен $15x^3y$.

Заметим, что и сумма, и разность рассмотренных подобных одночленов $19x^3y$ и $4x^3y$ подобна каждому из этих одночленов.

Найдём сумму подобных одночленов $\frac{8}{9}a^2bc^3$ и $-\frac{8}{9}a^2bc^3$:

$$\frac{8}{9}a^2bc^3 + \left(-\frac{8}{9}a^2bc^3\right) = \frac{8}{9}a^2bc^3 - \frac{8}{9}a^2bc^3 = \left(\frac{8}{9} - \frac{8}{9}\right) \cdot a^2bc^3 = 0 \cdot a^2bc^3 = 0.$$

Получили, что сумма подобных одночленов $\frac{8}{9}a^2bc^3$ и $-\frac{8}{9}a^2bc^3$ равна нулевому одночлену.

Подводя итоги, для суммы двух подобных одночленов можно сформулировать следующие правила.

Если сумма коэффициентов двух подобных одночленов равна нулю, то сумма таких одночленов равна нулевому одночлену.
Если сумма коэффициентов двух подобных одночленов не равна нулю, то сумма таких одночленов равна одночлену, подобному каждому из них, коэффициент которого равен сумме коэффициентов одночленов-слагаемых.

Найдём разность двух подобных одночленов, равных между собой. Например:

$$14xy^3z^4 - 14xy^3z^4 = (14-14) \cdot xy^3z^4 = 0 \cdot xy^3z^4 = 0.$$

Получили, что разность подобных одночленов, равных между собой, равна нулевому одночлену.

Подводя итоги, для разности двух подобных одночленов можно сформулировать следующие правила.

Если два подобных одночлена равны между собой, то разность таких одночленов равна нулевому одночлену.

Если два подобных одночлена не равны между собой, то разность таких одночленов равна одночлену, подобному каждому из них, коэффициент которого равен разности коэффициентов одночлена-уменьшаемого и одночлена-вычитаемого.

Вместо суммы и разности двух подобных одночленов можно для краткости говорить об их алгебраической сумме. Можно говорить также об алгебраической сумме нескольких подобных одночленов. Например:

$$-25x^2y^3zt + 11x^2y^3zt - 5x^2y^3zt = (-25 + 11 - 5) \cdot x^2y^3zt = -19x^2y^3zt.$$

Операция нахождения алгебраической суммы подобных одночленов называется *приведением подобных членов*, или, ещё короче, *приведением подобных*.

Два подобных одночлена называются *противоположными*, если их коэффициенты являются противоположными числами. Например, противоположными являются одночлены $\frac{8}{9}a^2bc^3$ и $-\frac{8}{9}a^2bc^3$, уже встречавшиеся выше в этом параграфе. Противоположными являются также одночлены $-10p^5grs^7$ и $10p^5grs^7$.

Можно сказать, что противоположные одночлены отличаются только знаком (аналогично тому, как отличаются только знаком противоположные числа). Сумма двух противоположных одночленов равна нулевому одночлену. Скажем, $-10p^5grs^7 + 10p^5grs^7 = 0$.

Одночленом, противоположным нулевому одночлену, считается он сам. Это выражается равенством: $-0 = 0$.

Разность двух одночленов можно находить как сумму уменьшаемого и одночлена, противоположного вычитаемому. Например:

$$a^4b^2c^2 - \left(-\frac{3}{7}a^4b^2c^2\right) = a^4b^2c^2 + \frac{3}{7}a^4b^2c^2 = \frac{10}{7}a^4b^2c^2.$$

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложения.

а) Ненулевые одночлены стандартного вида подобны, если …

б) Одночлены называются противоположными, если …

в) Коэффициент суммы подобных одночленов равен …

г) Степень суммы подобных одночленов может быть равна … или …

2 а) Как найти сумму подобных одночленов?

б) Как найти разность подобных одночленов?

в) Как привести подобные одночлены?

3 Верно ли, что противоположные одночлены подобны?

4 Верно ли, что для любых двух подобных ненулевых одночленов существует их частное?

5 Запишите буквенную часть одночлена:

а) $1{,}25a^3b^2c^2$;

б) $-10j^{19}k^7m^{10}p^8sv^{18}$;

в) $31e^{12}r^{10}y^2$;

г) $-6{,}345h^{17}p^{11}t^{12}$;

д) $-9c^2h^8p^{19}w^{13}$;

е) $3{,}4e^2f^{12}h^{11}j^{15}l^{16}z^7$;

ж) $-29d^9f^{12}t^{13}$;

з) 234.

6 Определите коэффициент одночлена:

а) $14a^2b^5$;

б) $-25b^{16}q^3s^5$;

в) $71c^{19}l^6z^6$;

г) $1{,}7d^{13}f^{17}h^{13}l^{18}$;

д) $-87c^4y^6$;

е) $23d^{15}e^{11}f^2x^{37}y^{12}$;

ж) $-2{,}642a^{25}k^{13}m^2$;

з) $69d^4f^5l^8m^8$.

7 Найдите подобные одночлены среди записанных:

а) $-5ab^2$; $7{,}4a^2b$ и $-17ab^2$;

б) $-22c^9e^6t^{20}$; $-12c^9e^6t^{20}$ и $-13{,}24c^9e^6t^{20}$;

в) $8{,}4d^3l^{18}y^6$; $59d^3l^{18}y^6$ и $-62d^{15}l^{17}y^{18}$;

г) $15j^5l^2m^5$; $-2{,}456j^{18}l^7m^9$ и $-62j^{18}l^7m^9$;

д) $64c^9r^2$; $22c^{12}r^2$ и $82c^{10}r^8$;

е) $20e^{19}m^{15}w^{20}$; $35e^{19}m^{15}w^{20}$ и $-5e^{19}m^{15}w^{20}$.

Н

8 Найдите сумму подобных одночленов:

а) $14x + 6x$;

б) $(-67j^{14}) + 89j^{14}$;

в) $16c^{20} + 12c^{20}$;

г) $87b^{12} + (-87b^{12})$;

д) $5z^3 + (-z^3)$;

е) $(-53k^5) + (-10k^5)$;

ж) $47d^4 + 60d^4$;

з) $27j^2 + (-83j^2)$.

9 Найдите сумму подобных одночленов:

а) $3a^3b^2c + 4a^3b^2c$;

б) $86r^{11}t^{19}v + 70r^{11}t^{19}v$;

в) $69a^7c^{20}t^{14}y^{13} + (-37a^7c^{20}t^{14}y^{13})$;

г) $(-42d^{19}e^{14}w^4) + 2d^{19}e^{14}w^4$;

д) $51e^{16}m^9 + 13e^{16}m^9$;

е) $(-69d^{10}u^{17}) + (-86d^{10}u^{17})$;

ж) $(-13b^{15}v^{12}w^3) + 67b^{15}v^{12}w^3$;

з) $82d^{17}z^5 + 4d^{17}z^5$.

10 Найдите разность подобных одночленов:

а) $7x - 2x$;

б) $49m^3 - m^3$;

в) $(-69c^{10}) - (-22c^{10})$;

г) $79j^5 - (-27j^5)$;

д) $6z^4 - (-2z^4)$;

е) $(-28b^7) - 18b^7$;

ж) $46l^{18} - 18l^{18}$;

з) $(-38g^{12}) - 100g^{12}$.

11 Найдите разность подобных одночленов:

а) $5ab^2c^2 - 9ab^2c^2$;

б) $(-75j^{19}y^{15}) - 35j^{19}y^{15}$;

в) $28rt^{16}w^5 - (-42rt^{16}w^5)$;

г) $(-44lv^{20}z) - (-51lv^{20}z)$;

д) $98m^{20}w^{14}z^{13} - 31m^{20}w^{14}z^{13}$;

е) $92c^6e^{14} - (-66c^6e^{14})$;

ж) $(-64h^4l^{11}m^6) - 79h^4l^{11}m^6$;

з) $95a^{12}p^{12} - 64a^{12}p^{12}$.

12 Приведите подобные члены:

а) $21p - 4p + 7p$;

б) $13w^7 + 3w^7 + 12w^7$;

в) $-14f^2 + 7f^2 - 9f^2$;

г) $8m^{11} - 9m^{11} - 14m^{11}$;

д) $-11p - 9p - 2p$;

е) $-6a^2 - 7a^2 + 10a^2$;

ж) $-13e^{14} + 3e^{14} + 9e^{14}$;

з) $12y^7 - 11y^7 + 12y^7$.

13 Приведите подобные члены:

а) $-11x^3y^5 - 2x^3y^5 + 12x^3y^5$;

б) $-6f^7k^4 - 13f^7k^4 + f^7k^4$;

в) $3a^3t^3 - 12a^3t^3 + 4a^3t^3$;

г) $9t^{18}u^8 - 13t^{18}u^8 + 14t^{18}u^8$;

д) $-8k^{20}t^{20} + 12k^{20}t^{20} - k^{20}t^{20}$;

е) $-11d^9e^{12}x^2 - 13d^9e^{12}x^2 - 3d^9e^{12}x^2$;

ж) $11k^7v^{12}z^{18} - 131k^7v^{12}z^{18} - 11k^7v^{12}z^{18}$;

з) $-14g^{17}h^5 - 3g^{17}h^5 + 23g^{17}h^5$.

П

14 Верно ли, что одночлен, являющийся алгебраической суммой подобных одночленов, подобен каждому из них?

15 При каких значениях m и n одночлены будут подобными?

а) $18x^2y^m$ и $-1,44x^ny^6$;

б) $-5f^np^{10}$ и $10f^{15}p^m$;

в) $13r^nw^{23}$ и $14r^5w^m$;

г) $-2e^nk^{11}$ и $-11e^{26}k^m$;

д) $12s^ny^{20}$ и $-9s^{10}y^m$;

е) $9b^ny^{25}$ и $-15b^{30}y^m$;

ж) $4c^nl^3$ и $c^{20}l^m$;

з) $13f^nv^{27}$ и $3f^{24}v^m$.

16 Упростите.

а) $-31x^3y^6 - (2x^2y^2)\cdot(-9xy^4)$;

б) $15d^{22}t^{22} + (-4d^{19}t^2)\cdot(7d^3t^{20})$;

в) $(63s^{19}u^9) : 21s^{16}u^7 - 89s^3u^2$;

г) $(54xz^{11} + 21xz^{11})\cdot(-9xz^{18})$;

д) $(6k^{20}n^{20})\cdot(2k^9) - (-79k^{29}n^{20})$;

е) $(6m^{22}p^{17})^3 : (3m^{15}p^6)^2 + 54m^{36}p^{39}$;

ж) $(2p^{19})^5 + (8p)^3\cdot(-34p^{92})$;

з) $(98r^{17}w^{14}) : (41r^{14}w^{13}) - 4r^3w$.

Проект «Числа-гиганты».
Подготовьте презентацию или доклад об очень больших числах, встречающихся в природе, науке и технике.

Жизненная задача.

СИТУАЦИЯ. Разработка шифров на основе одночленов.

ВАША РОЛЬ. Шифровальщик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. При шифровании информации часто используются одночлены от нескольких переменных. Для разрабатываемого вами шифра будут применяться одночлены от 7 переменных, причём степень каждой переменной не выше 5.

ЗАДАНИЯ.

1. Сколько различных, не подобных между собой одночленов имеется, если в каждый из них должны входить:

а) все переменные;

б) хотя бы одна переменная?

2. Ваш коллега разрабатывает шифр, тоже использующий одночлены от 7 переменных, но все эти одночлены должны иметь одинаковую степень, а именно 10. Сколько таких различных, не подобных одночленов имеется, если в каждый из них должны входить:

а) все переменные;

б) хотя бы одна переменная?

ГЛАВА II МНОГОЧЛЕНЫ

2.1 Понятие многочлена, стандартный вид многочлена

Знакомимся с новой темой

Многочленом называется сумма одночленов.

Например, $7abc + 5a^2c + 3b^4c^3$ – многочлен. Он является суммой одночленов $7abc$; $5a^2c$ и $3b^4c^3$. Многочленом является также выражение $-5xyz - 4xy^5 + 6{,}8zyx + yxz$. Этот многочлен – сумма одночленов $-5xyz$; $-4xy^5$; $6{,}8zyx$ и yxz.

Можно сказать по-другому:

Многочлен – это алгебраическое выражение, составленное из нескольких одночленов, соединённых знаками «+» или «–».

Одночлены, суммой которых является многочлен, называются *членами* этого многочлена. Например, членами многочлена $9m^2n - 7mnk^3$ являются одночлены $9m^2n$ и $-7mnk^3$.

Один и тот же многочлен можно записывать в разных видах (на основе переместительного свойства сложения и переместительного и сочетательного свойств умножения).

Например, $2ab^2c - 63a^2bc + c^3$ и $-63cba^2 + 2cab^2 + c^3$ – два разных вида одного и того же многочлена, поскольку он является суммой равных одночленов $2ab^2c$ и $2cab^2$; $-63a^2bc$ и $-63cba^2$; c^3 и c^3.

Говорят, что многочлен записан в *стандартном виде*, если все его члены имеют стандартный вид и среди них нет подобных.

Например, первый из многочленов, упомянутых в этом параграфе, $7abc + 5a^2c + 3b^4c^3$, записан в стандартном виде, а второй: $-5xyz - 4xy^5 + 6{,}8zyx + yxz$ – нет, т.к. среди его членов есть три подобных: $-5xyz$; $6{,}8zyx$; yxz.

Любой многочлен можно записать в стандартном виде (часто говорят «привести к стандартному виду»). Для этого нужно записать в стандартном виде все его члены, а затем привести подобные члены.

Например, если записать в стандартном виде уже дважды упомянутый многочлен $-5xyz - 4xy^5 + 6{,}8zyx + yxz$, то получим $2{,}8xyz - 4xy^5$.

Стандартным видом записи этого многочлена является также $-4xy^5 + 2{,}8xyz$.

Многочлен стандартного вида, состоящий из двух членов, называется *двучленом*, из трёх членов – *трёхчленом* и т.д. Одночлен можно считать частным случаем многочлена, состоящего из одного члена. В частности, многочленом считается любое действительное число. Например, -5; $\frac{2}{11}$; 0 являются многочленами. Число 0 называется *нулевым многочленом*.

Двучленами являются $5x - 8$ и $-a^2bc + \frac{3}{7}b^5c$, поскольку каждый из этих многочленов имеет стандартный вид и содержит два члена. Трёхчленами являются $x^2 - 2x - 15$; $4ab^2 - 56bc + 3a^3c^2$; $x - y + z$.

Степенью ненулевого многочлена стандартного вида называется наибольшая из степеней его членов.

Например, многочлен $-x^2y^3 - 2xy^2 - 1$ записан в стандартном виде, его члены имеют соответственно степени 5; 3 и 0, значит, это многочлен пятой степени.

Говорить о степени многочлена имеет смысл только после приведения его к стандартному виду.

Например, рассмотрим многочлен $5m^3 + 3mn - 2m^3 + n^2 - 3m^3$. Он не имеет стандартного вида. Приведя подобные члены, получим многочлен $3mn + n^2$, уже имеющий стандартный вид. Это двучлен второй степени, т.к. степень каждого из его членов равна двум.

Часто многочлены стандартного вида удобно записывать в порядке убывания степеней их членов (а поскольку многочлен может содержать несколько членов с одинаковыми степенями, то точнее будет сказать «в порядке невозрастания степеней его членов»).

Например, многочлен стандартного вида $2ab + 7a^2b^2 - 5a - ab^3$, имеющий степень 4, можно записать в порядке невозрастания степеней его членов так: $7a^2b^2 - ab^3 + 2ab - 5a$ или так: $-ab^3 + 7a^2b^2 + 2ab - 5a$.

Многочлен с одной переменной всегда можно записать в порядке убывания степеней его членов. Например, записав таким образом многочлен $4x - 3x^3 - 8 + 5x^2$, получим: $-3x^3 + 5x^2 + 4x - 8$.

Любое действительное число, отличное от нуля, является многочленом нулевой степени.

Степень нулевого многочлена не определена.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложения.

а) Многочленом называется …

б) Многочлен имеет стандартный вид, если …

в) Чтобы привести многочлен к стандартному виду, нужно …

г) Трёхчленом называется …

д) Степенью ненулевого многочлена стандартного вида называется …

е) Степень нулевого многочлена …

2 Семиклассник Вадя считает, что степень многочлена равна сумме степеней всех его одночленов. Прав ли Вадя?

3 Семиклассник Вася считает, что многочлен имеет стандартный вид, если все одночлены этого многочлена имеют стандартный вид. Прав ли Вася?

4 Какие из выражений являются многочленами:

а) $1 + 2 + 3 + 4$;

б) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$;

в) $a : b$;

г) $x + y - z$;

д) $r^2t - y^2h$;

е) $6c \cdot 4 + u \cdot 3 \cdot u$;

ж) 0;

з) $2xyzpqrst$?

5 Какие из многочленов записаны в стандартном виде:

а) $2x - 3y$;

б) $7a - 5a + 1$;

в) $21xy + a^2b^4$;

г) $m \cdot 4n \cdot 2 + nm$;

д) $2q^3 + 3q^3$;

е) $wk - 5wks$;

ж) $acb + 5$;

з) $-5x^3 + 5 \cdot (-y)$?

6 Запишите многочлен в стандартном виде:

а) $a + b^2 - 3a$;

б) $x + 2x + 3y - 3x$;

в) $-2x + 6y + 5x \cdot 4 - y^2$;

г) $h^2g^2 + h \cdot 5gh \cdot 7g$;

д) $-q^3w^5 \cdot (-qw) - q^4w^6$;

е) $(nmk)^3 - n^3m \cdot m^2k^3$;

ж) $-7s^2d^4r^3 + 9 \cdot (-d^2r \cdot s)^2 \cdot r$;

з) $3f^3 \cdot f - f^2 \cdot (-f^2)$.

Н

7 Определите степень многочлена:

а) $6m - 2n$;

б) $19p^5t - 19t^2 - p^2t^2$;

в) $9k^2y^2 - 8k^2y^3 + k^2y^5$;

г) $18t^3 + 13t^4 + 9t^5$;

д) $-3abc + b^2 + a^3$;

е) $5ac - 8u - a^4cu^5$;

ж) $-8l^2t + 11j^5l^2t^5 - 2jl^3t$;

з) $f^2 - 8f^2u + 10u^5$.

8 Найдите значение многочлена:

а) $2x^2 - x - 1$ при $x = 0,5$;

б) $9a^2 - 6ab + b^2 + 2a$ при $a = \frac{2}{3}$, $b = 2$;

в) $18x^2 - 16lx^4 - 3x^5 - 12l^5x^5$ при $x = 1$, $l = -1$;

г) $15 - 11s + 4s^3$ при $s = 2$.

9 Упростите:

а) $7aba^2 - 3a \cdot (-a^2b)$;

б) $d \cdot 7cd \cdot c^2 - 13c^3d^2$;

в) $23(kt)^3 : k^2 + 17kt^3$;

г) $13\,j^2w + 7 \cdot (wj^4r)^2 : (wj^4)$;

д) $16bn^2bn^3 - 7b^2nn^4$;

е) $3g^4x^7 + 5g^2x^5g^2x^2 - 4g^4x^7$;

ж) $-4kl + 2k13l - lk$;

з) $-8p^4s^5 + pp^2s \cdot (s^2)^2$.

2.2 Сумма и разность многочленов

Знакомимся с новой темой

Сразу начнём с определения:

Суммой двух многочленов называется многочлен, членами которого являются все члены данных двух многочленов.

Например, суммой многочленов $3xy - 6x^2 - 2y$ и $5y^2 - 4x$ является многочлен $3xy - 6x^2 - 2y + 5y^2 - 4x$ (мы сначала выписали все члены первого многочлена, а затем второго).

Нахождение суммы двух многочленов можно записать следующим образом, с помощью знака «+»:

$$(3xy - 6x^2 - 2y) + (5y^2 - 4x) = 3xy - 6x^2 + 5y^2 - 4x.$$

Если при нахождении суммы многочленов появляются подобные члены, то их принято приводить. В рассмотренном выше примере подобных членов не было.

Рассмотрим ещё один пример. Найдём сумму многочленов $\frac{6}{11}a^2 - 5a + 4b - \frac{2}{3}$ и $2b^3 - \frac{6}{11}a^2 + 2a - \frac{1}{3}$. Получим:

$$\left(\frac{6}{11}a^2 - 5a + 4b - \frac{2}{3}\right) + \left(2b^3 - \frac{6}{11}a^2 + 2a - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{6}{11}a^2 - 5a + 4b - \frac{2}{3} + 2b^3 - \frac{6}{11}a^2 + 2a - \frac{1}{3} = 2b^3 - 3a + 4b - 1.$$

Мы привели подобные члены:

$\frac{6}{11}a^2$ и $-\frac{6}{11}a^2$, $-5a$ и $2a$; $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{3}$.

Можно рассматривать сумму не только двух, но и большего количества многочленов.

Найдём, например, сумму трёх многочленов:

$$(3x^2 - 4x + 1) + (-4x^2 + 12x + 9) + (x^2 - x + 2) =$$

$$= 3x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 12x + 9 + x^2 - x + 2 = 7x + 12.$$

Разностью двух многочленов называется многочлен, членами которого являются все члены многочлена-уменьшаемого и члены, противоположные членам многочлена-вычитаемого.

Например, разностью многочленов $3xy - 6x^2 - 2y$ и $5y^2 - 4x$ является многочлен $3xy - 6x^2 - 2y - 5y^2 + 4x$ (мы сначала выписали все члены первого многочлена, а затем члены, противоположные членам второго многочлена).

Нахождение разности двух многочленов можно записать следующим образом, с помощью знака «–»:

$$(3xy - 6x^2 - 2y) - (5y^2 - 4x) = 3xy - 6x^2 - 2y - 5y^2 + 4x.$$

Если при нахождении разности многочленов появляются подобные члены, то их нужно привести. В рассмотренном выше примере подобных членов не было.

Операцию вычитания многочленов можно выполнять также с помощью понятия противоположного многочлена. Многочленом, противоположным данному многочлену, называется многочлен, составленный из членов, противоположных членам данного многочлена.

Например, для многочлена $3abc - 2a^3 - 9bc^2 + 3ab$ противоположным многочленом будет $-3abc + 2a^3 + 9bc^2 - 3ab$.

Разность двух многочленов равна сумме многочлена-уменьшаемого и многочлена, противоположного вычитаемому.

Например:

$$(4x^3 + 3x^2 - 4x + 1) - (4x^2 - 4x + 9) = (4x^3 + 3x^2 - 4x + 1) + (-4x^2 + 4x - 9) =$$
$$= 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 4x - 9 = 4x^3 - x^2 - 8.$$

Так же, как это было для чисел, часто используют общее название для суммы или разности двух многочленов: *алгебраическая сумма*.

Можно говорить также и об алгебраической сумме нескольких многочленов. Например:

$$(a^3 + 3ab - 4a + b) - (2b^2 - 4a + 3b) + (3ab + 2b + 1) - (b^3 - 2b^2 - 9ab) =$$
$$= a^3 + 3ab - 4a + b - 2b^2 + 4a - 3b + 3ab + 2b + 1 - b^3 + 2b^2 + 9ab =$$
$$= a^3 - b^3 + 15ab + 1.$$

При нахождении алгебраической суммы многочленов используются правила работы со скобками, аналогичные тем, которые вы уже хорошо знаете для чисел.

Для многочленов эти правила можно сформулировать следующим образом.

Если перед скобками стоит знак «+», то скобки можно убрать, оставив знаки всех слагаемых в скобках без изменения.

Если перед скобками стоит знак «–», то скобки можно убрать, изменив знаки всех слагаемых в скобках на противоположные.

Перед скобками знак может отсутствовать; в этом случае предполагается, что перед такими скобками стоит знак «+».

Описанные выше процедуры называются обычно *раскрытием скобок*.

Например:

$$(2x^2y - 5y^2 + 3z^2) - (2x^2 - 7y) + (-6x + 8z - 9) =$$
$$= 2x^2y - 5y^2 + 3z^2 - 2x^2 + 7y - 6x + 8z - 9.$$

Иногда возникает необходимость выполнения противоположной процедуры: записать многочлен в скобках, перед которыми стоит нужный нам знак «+» или «–» (говорят ещё *«заключить многочлен в скобки»*).

Правила заключения многочлена в скобки основаны на сформулированных выше правилах.

Для заключения многочлена в скобки со знаком «+» перед скобками нужно записать в скобках все его члены со своими знаками.

Для заключения многочлена в скобки со знаком «–» перед скобками нужно записать в скобках все его члены с противоположными знаками.

Например, заключим в многочлене $9abc - a^2 + 3b^2 - 5c^2$ три последних члена в скобки сначала со знаком «+»:

$$9abc - a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 9abc + (-a^2 + 3b^2 - 5c^2),$$

а затем со знаком «–»:

$$9abc - a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 9abc - (a^2 - 3b^2 + 5c^2).$$

Н

1 Закончите предложения.

а) Суммой двух многочленов называется ...

б) Разностью двух многочленов называется ...

в) Многочленом, противоположным данному многочлену, называется ...

2 Чему равна сумма двух противоположных многочленов?

3 а) Сумма двух многочленов равна нулевому многочлену. Что можно сказать об этих многочленах?

б) Разность двух многочленов равна нулевому многочлену. Что можно сказать об этих многочленах?

4 Найдите многочлен, равный сумме многочленов:

а) $2x^2 - 4x + 3$ и $x^2 + 4x - 2$;

б) $-19l^5w^2 + 12l^2w^6$ и $2l^5w^2 - 17l^2w^6$;

в) $9f^2 + 6fj$ и $-14f^2 + 11f$;

г) $12c^3 + 8lt^3 - 10c^2lt^3$ и $-5c^3 + 9c^2lt^3$;

д) $a^2 - 3b^2 + c^2 - 4ac$ и $2bc + 4ac - a^2 + b^2 - 9c^2$;

е) $-3t^2 + 3t^3 - t^4 - 14t^5$ и $-18t^2 + 11t^3 + 14t^4 + 7t^5$;

ж) $-39f^3 + 19a^2f^3$ и $f^3 - 9a^2f^3$;

з) $6c^2 - 2cy^2 + 17y^3$ и $-3cy^2 + 11y^3 + c^3y$.

5 Найдите многочлен, равный разности многочленов:

а) $2x^2 + 5x - 7$ и $x^2 + 6x - 7$;

б) $-20 - 12v - 38v^2$ и $4 + 6v + 9v^2$;

в) $-17l^2 + 16l^5 - 30l^6$ и $14l^2 + 9l^5 + 6l^6$;

г) $10d + 16d^3u - 40d^4u^5$ и $-5d^3u - 14d - 17d^4u^5$;

д) $-112fz + 16f^6z + 28f^5z^2$ и $-102fz + 60f^6 + 38f^5z^2$;

е) $-2e^5 + 10e^4m + 3e^3m^6$ и $-6e^4m + 14e^3m^6$;

ж) $-7j^2 + 4j^4 + 2j^6$ и $-9j^2 - 13j^4 - 18j^6$;

з) $-9z^3 + 12z^4$ и $-6z^3 - 13z^4 + 4$.

Н

6 Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $(3xy - 7x^2) + (2xy + 7x^2)$;

б) $(12 + 7a^2v - 7a^6v^2) - (-5 + 16a^2v + 2a^6v^2)$;

в) $(10r^3 - a^4r^3) + (-5r^3 - 6a^4r^3)$;

г) $(-12 - 4c^4 - 18c^6) + (13 + 10c^4 + 19c^6)$;

д) $(-12h^2 + 19h^4 + 19h^5) - (-8h^2 - 8h^4 - h^5)$;

е) $(6uv^2 - 10v^3 - 19uv^3) + (4uv^2 + 5v^3 + 13uv^3)$;

ж) $-(-4hz - 19h^2z) - (hz + 2h^2z)$;

з) $(18dy - 15y^2 + 2d^2y^3) - (18dy + 10y^2 + d^2y^3)$.

7 Найдите алгебраическую сумму многочленов:

а) $(x^2 - 3xy - 7y^2) + (2xy + 8y^2) - (x^2 - 8xy + y^2)$;

б) $(-20v + 7v^2 + 11v^3) - (7v - 14v^2 - 12v^3) + (11v - 8v^2 - 14v^3)$;

в) $-(-7 + 14h^2) - (-13 + 15h^2) - (5 + 3h^2)$;

г) $(12 + 3ep^3 - 14e^2p^3) + (7 + 8ep^3 - 12e^2p^3) + (11 + 9ep^3 + 18e^2p^3)$;

д) $-(2 + 3p) + (-7 - 8p - 8p^3) - (-8 - 8p + 8p^3)$;

е) $-(-15t^3 - 11m^3t^3) + (16 - 12m^3t^3) + (-20 + 15t^3)$;

ж) $(-12p^2 - 8v^3) + (18p^2 - 8p^3 + 20v^3) + (4p^2 + 3p^3 - 19v^3)$;

з) $-(13 - 19z - 19ez) + (1 - 13z - 17ez) - (-9 - 19z + 9ez)$.

8 Упростите выражение:

а) $4ab^2 - (4a^2b - 2ab) - (6a - 2ab)$;

б) $-10mv^2 + 5mv^3 - (-16v^2 + 4mv^2 - 3mv^3) + 13mv^3$;

в) $-(-14l^3s - 22ls^2) + (16l^3s + 9ls^2) - 17l^3s$;

г) $(3 + 14t - 9t^2 - 7t^3) - 6t^2 + (-9 + 2t - 19t^2 - 4t^3) - 12t^3$;

д) $16x + (-15x + 15x^2) - 6x - (14x - 9x^2) - 7x^2$;

е) $16a^3 + (28a^3 - 48aw^3 + 12a^3w^3) + (64aw^3 + 4a^3w^3) - 4a^3w^3$;

ж) $(17r - 16r^2x^2 + 14rx^3) - (13r - 12r^2x^2 + 11rx^3) + (-18r + 11r^2x^2 - 20rx^3)$;

з) $(-17 - 15v - 11v^2) - 1 - 4v^2 + (-20v + v^2)$.

9 Заключите первые два члена пятичлена в скобки со знаком «–» перед ними, а три последних – в скобки со знаком «+» перед ними:

а) $6ab^2 - a^2b - 3ab + 6a - 7b$;

б) $-14 - 16b^3 + 7t - b^3t + 6t^2$;

в) $6g^2 - 3g^3 - 17x - 6g^2x + 13x^3$;

г) $513g^2j - 12 + 7g^2 + 45g^3 - 6g^3j^2$;

д) $14j^3 + 5u^2 - 8u^3 + 12j^2x - 12u^2x$.

10 Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях переменных:

а) $ab^2 - (2ab + ab^2) - (3a - 2ab)$ при $a = 2$; $b = 321$;

б) $7l + (-7l + l^3x - 10l^2x^3) - (-10l^2x^3)$ при $l = 3$; $x = \frac{1}{9}$;

в) $22x + (-31y^3 + 7y) + (-8y + 32y^3)$ при $x = -1$; $y = 3$;

г) $4r^4 - (-7r - p^2r + 4r^4 - 10pr^4) - 10pr^4 - p^2r$ при $r = 7$; $p = 5$;

д) $(7l + 2a^2f^3l) - (2a^2f^3l + 4a^2l^2 - 7l) - 14l$ при $a = 9$; $f = 11$; $l = \frac{1}{9}$;

е) $10b^2t - (5t^3 - 7 + 4b + 10b^2t) + 5t^3$ при $b = 2$; $t = -9$;

ж) $-(2m^3 - 10r^2 - m^3r) + (4m^3 - 10r^2 - 2m^3r) - 2m^3$ при $m = -5$; $r = 0{,}1$;

з) $7u^3 - (4 + 7u^3 - 3x) + 3x$ при $u = -12{,}13$; $x = 4$.

П

11 Семиклассники обсуждали вопрос, какую степень имеет алгебраическая сумма нескольких многочленов. Вадя сказал, что степень алгебраической суммы нескольких многочленов равна сумме степеней этих многочленов. Вася сказал, что она равна наибольшей из степеней этих многочленов. Валя сказал, что и Вадя, и Вася заблуждаются. А что думаете вы по этому поводу?

12 Найдите такой многочлен A, для которого выполняется равенство:

а) $A + (6 - 4v + 2v^2 + 8x^2) = 9 - 10v + v^2$;

б) $(10 + 66h - 36h^2 + 40h^3) - A = -1 - 59h + 24h^2 - 80h^3$;

в) $(4x^2y - 3xy) - A = 5x^2y - 3xy + y$;

г) $A - (7 + 6h^2 + 5l - 3h^3l^2) = 5 + 9h^2 - 3l - 2h^3l^2$.

13 Что можно сказать о степени суммы и степени разности двух многочленов, если известно, что

а) степень одного из них равна 3, а степень другого равна 2;

б) степень каждого из них равна 3?

2.3 Произведение многочлена на одночлен

Знакомимся с новой темой

Произведением многочлена на одночлен называется многочлен, членами которого являются произведения членов многочлена-сомножителя на одночлен-сомножитель.

Найдём, например, произведение многочлена $2x^2 - 7x + 3$ на одночлен $3x^2$. Получим:

$$(2x^2 - 7x + 3) \cdot (3x^2) = 2x^2 \cdot 3x^2 - 7x \cdot 3x^2 + 3 \cdot 3x^2 =$$

$$= 6x^4 - 21x^3 + 9x^2.$$

Таким образом, можно сформулировать правило:

Для умножения многочлена на одночлен нужно умножить на этот одночлен каждый член многочлена и сложить полученные произведения.

Нужно постепенно приучаться вести более краткую запись такого умножения, находя устно произведение членов многочлена на одночлен и сразу записывая их. Например, так:

$$(-5a^2 + 4ab + 3b) \cdot (2ab) = -10a^3b + 8a^2b^2 + 6ab^2.$$

Умножение многочлена на одночлен основано на распределительном свойстве умножения.

Наряду с произведением многочлена на одночлен можно говорить и о произведении одночлена на многочлен. Это произведение находится аналогично: одночлен нужно умножить на каждый член многочлена и сложить полученные произведения:

$$-4m^3 \cdot (3mn^2 - 2mn + 5n - 1) = -12m^4n^2 + 8m^4n - 20m^3n + 4m^3.$$

Переместительное свойство умножения позволяет заключить, что произведение многочлена на одночлен равно произведению этого одночлена на этот многочлен. Скажем:

$$2pq^2 \cdot (p^2 - 3pq - 6q^2) = (p^2 - 3pq - 6q^2) \cdot 2pq^2.$$

Поскольку при нахождении произведения многочлена на одночлен (или одночлена на многочлен) многочлен-сомножитель записывается в скобках, то нахождение такого произведения часто называют раскрытием скобок.

Степень произведения ненулевого многочлена на ненулевой одночлен равна сумме степеней многочлена и одночлена, которые перемножались.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложения.

а) Произведением многочлена на одночлен называется ...

б) Произведением одночлена на многочлен называется ...

в) Степень произведения ненулевого многочлена на ненулевой одночлен равна ...

2 Как связаны между собой произведение многочлена на одночлен и произведение этого одночлена на этот многочлен?

3 а) Какую степень имеет произведение одночлена 3-й степени на многочлен 4-й степени?

б) При умножении многочлена 2-й степени на некоторый одночлен получился многочлен 6-й степени. Что можно сказать о степени одночлена?

4 Выполните умножение:

а) $6p \cdot (4 - p + 3p^2)$;

б) $t \cdot (8 - 7t^2 - 5t^3)$;

в) $(3h^3 + 6h^2 - 3) \cdot 3h$;

г) $(-5t) \cdot (2t + t^2 + 9)$;

д) $4j \cdot (-4j^2 + 5 - 7j)$;

е) $(3t^2 + 7t - 6t^3) \cdot (-t)$;

ж) $3e \cdot (1 + 2e^5 - 7e^3)$;

з) $2k \cdot (7k^2 + 12k + 6)$.

5 Запишите произведение в виде многочлена:

а) $(2t^3 - 3t^2 - 5) \cdot 2t^2$;

б) $(-3 + 3r^2 - 8r^3) \cdot 5r^5$;

в) $2x^{12} \cdot (6x^2 - 1 + 13x)$;

г) $\left(-\frac{1}{5}f^4\right) \cdot (-5f + 5f^2 + 15f^3)$;

д) $(1 + 3e - 9e^2 - 8e^4) \cdot 4e^7$;

е) $8a^3 \cdot (-a^{15} + 4a^{18} + 2a^{27})$;

ж) $-2h^{11} \cdot (9h^6 + 10h^7 + 6h^{19})$;

з) $(-6c^{14} - 2c^{26} + 5c^{45}) \cdot (-3c^{16})$.

Н

6 Определите степень произведения, не выполняя умножения:

а) $11u^3z \cdot (-7zu + 3z^2 - u^2 - 7z - 5)$;

б) $2n^2p^3t^5 \cdot (-5n^8p^3 + 7n^9p^4 + 9n^{10}p^3)$;

в) $de^3 \cdot (6de^7 - d^4e^4m^4 - 4e^2m^6)$;

г) $8w^{10}y^3 \cdot (10e^5y^3 - 3ey^6 - 3e^3w^2)$;

д) $-10f^6l^8 \cdot (4f^2l^3 + 8f^6l^4 + 8f^2l^7 - 4f^6l^8)$;

е) $-4e^9z^{10} \cdot (-7e^7 + 10e^6z^2 + 3e^9z^5 - 9e^9z^{10})$;

ж) $9k^7z^4 \cdot (-k^7z^4 - 2z^5 + 6k^3z^6 + 6k^4z^6)$;

з) $-4d^3l^5 \cdot (-9d^4 + d^2l^4 - 5d^4l^4 + 6d^8l^5 - d^{10}l^6)$.

7 Найдите произведение:

а) $\frac{7}{3}cb \cdot (6ac - 3ab)$;

б) $2r^2b \cdot (9b^3r^3 - 10br^3)$;

в) $(-0{,}5m^5b^6) \cdot (-2m^3y^2 + 6m^3y^3)$;

г) $\frac{1}{5}c^3u^4 \cdot (2c^2 + 10c^2u)$;

д) $3e^2g^2 \cdot (3e^2 + 3e^3g^2 + e^2g^3)$;

е) $\frac{1}{21}j^4r^5 \cdot (7j^3 + 3j^2r^3)$;

ж) $\frac{1}{4}n^3p^7 \cdot (4 - 10n^2p^3)$;

з) $\frac{1}{10}a^3k^4 \cdot (4a^3k - 10a^2k^2)$.

8 Раскройте скобки:

а) $\left(-\frac{7}{8}xyz^2 + \frac{7}{9}x^2yz\right) \cdot 36y^2z$;

б) $\left(-2bd^2 + 3b^2h^2 - \frac{7}{2}b^2d^2\right) \cdot 2b^2d$;

в) $(-b^3r^2u - 0{,}3b^3u^2) \cdot (-10r^2bu^4)$;

г) $\left(\frac{1}{3}k^2x - \frac{1}{21}k^3wx^3\right) \cdot 21kw^2x$;

д) $\left(-\frac{1}{3}jn^2 - n^3 + \frac{5}{3}jn^3\right) \cdot 21j^4n^3k^2$;

е) $12f^2m^3j \cdot \left(\frac{1}{3}fm^2j^2 - \frac{1}{4}f^3j\right)$;

ж) $20b^4n \cdot \left(\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{5}b^3n\right)$;

з) $5j^3n^5 \cdot (jn^2 - j^2n + 8j^3n^3)$.

П

9 Многочлен стандартного вида умножается на ненулевой одночлен. Могут ли у полученного многочлена быть подобные члены?

10 Упростите выражение:

а) $ab \cdot (6a^2b - 2b^2) - (3a^3 - 2ab) \cdot 2b^2$;

б) $a \cdot (2 - 3w^2 - 4w^4) + (3 + 4w^2) \cdot aw^2$;

в) $a^2g^2 \cdot (a - 4c^2g + 2ac^2g) - (-2ac^2g^2 + a^2c^2g^2) \cdot 2ag$;

г) $-6jr \cdot \left(1 + \frac{4}{3}p^3r - \frac{1}{3}jp^3r\right) + 2p^3r^2 \cdot (4j - j^2)$;

д) $120h^2v \cdot \left(-\frac{1}{40} - \frac{1}{15}b^2h - \frac{1}{24}b^3hv^2\right) - 24hv \cdot \left(-\frac{1}{8}h - \frac{1}{3}b^2h^2\right)$;

е) $5r^2w^2 \cdot \left(\frac{6}{5}d^3w + drw + r^4w^2\right) - 6drw^3 \cdot \left(d^2r + \frac{5}{6}r^2\right)$;

ж) $9px \cdot \left(a^2 + \frac{10}{9}a^2p^2 - a^3x^2\right) + 3a^2x \cdot \left(-\frac{10}{3}p^3 + 3apx^2\right)$;

з) $2j^3u \cdot (-u + 2d^3u - 3d^3u^2) - 6d^3u^2 \cdot \left(\frac{2}{3}j^3 - j^3u\right)$.

11 Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях переменных:

а) $6ab^2 \cdot (2ab - a^2) - (3a^2b^2 - 2ab - 1) \cdot 4a$ при $a = 2$; $b = 3$;

б) $2g^2 \cdot \left(-3f^2 + \frac{1}{2}g + f^2g^2\right) - 2f^2g^2 \cdot (g^2 - 3)$ при $f = 13$; $g = 3$;

в) $6hx \cdot \left(ah - \frac{5}{3}a^3 \cdot x - \frac{2}{3}hx^2\right) - 10ahx \cdot \left(\frac{3}{5}h - a^2x\right)$ при $a = -5$; $h = 3$; $x = -2$;

г) $5hu \cdot \left(2h^2p^3u^2 - hp + \frac{2}{5}hu\right) - 10h^2pu \cdot \left(hp^2u^2 - \frac{1}{2}\right)$ при $h = 2$; $u = \frac{1}{4}$; $p = 13$;

д) $32bjx \cdot \left(\frac{b}{8} + \frac{9}{32}b^2j^2 - \frac{1}{4}jx^2\right) + 72bj^2x \cdot \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{8}b^2j\right)$ при $b = \frac{1}{2}$; $j = 10$; $x = 0{,}1$;

е) $cs^2 \cdot (11 - 9c^2 + 6c^2s) - 3c^2s^2 \cdot (2cs - 3c)$ при $c = \frac{1}{11}$; $s = 10$;

ж) $-9bx^2 \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{b^2x^2}{3} + b^5x^3\right) + 3b^3x^4 \cdot (3b^3x - 1)$ при $b = -0{,}1$; $x = -9$;

з) $8a^4 \cdot \left(1 - \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{8} - \frac{3u^6}{4a}\right) + 12a^3u^2 \cdot \left(\frac{a}{6} + \frac{au^2}{12} + \frac{u^4}{2}\right)$ при $a = \frac{1}{4}$; $u = 17$.

2.4 Произведение многочленов

Знакомимся с новой темой

Произведением двух многочленов называется многочлен, членами которого являются произведения каждого члена одного многочлена на каждый член другого многочлена.

Найдём, к примеру, произведение многочлена $x^2 - 5x - 2$ на многочлен $2x + 3$:

$$(x^2 - 5x - 2) \cdot (2x + 3) = x^2 \cdot 2x - 5x \cdot 2x - 2 \cdot 2x + x^2 \cdot 3 - 5x \cdot 3 - 2 \cdot 3 =$$
$$= 4x^3 - 10x^2 - 4x + 3x^2 - 15x - 6 = 4x^3 - 7x^2 - 19x - 6.$$

Перемножив каждый из трёх членов первого многочлена на каждый из двух членов второго многочлена, мы получили шесть произведений одночленов, алгебраическая сумма которых даёт шестичлен, в котором оказались подобные члены ($-10x^2$ и $3x^2$; $-4x$ и $-15x$). Приведя эти подобные, мы получили четырёхчлен $4x^3 - 7x^2 - 19x - 6$, являющийся произведением многочлена $x^2 - 5x - 2$ на многочлен $2x + 3$.

Чтобы найти произведение двух многочленов, нужно умножить каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и сложить полученные произведения. После этого нужно выяснить, есть ли в записанном многочлене подобные члены, и привести их, если они есть.

При умножении многочленов очень важно контролировать, действительно ли каждый член первого многочлена умножен на каждый член второго. Нужна уверенность, что все возможные произведения выписаны, что никакое произведение не забыто и никакое не выписано дважды.

Рекомендуется придерживаться определённого порядка умножений. Можно поступить так: в первом многочлене берётся первый член и перемножается по очереди сначала с первым, затем со вторым членом второго многочлена и т.д., вплоть до последнего члена второго многочлена. Затем в первом многочлене берётся второй член и с ним делается то же самое, что и с первым членом: он перемножается по очереди сначала с первым, затем со вторым членом второго многочлена и т.д., вплоть до последнего члена второго многочлена. Затем в первом многочлене берётся третий член (если он есть) и с ним делается то же самое и т.д.

А можно поступить наоборот: умножать по очереди каждый член первого многочлена сначала на первый член второго многочлена, затем на второй и т.д. Именно так мы поступили, выполняя умножение в разобранном выше примере.

Для косвенного контроля также можно использовать тот факт, что при перемножении двух многочленов: m-члена и n-члена количество произведений должно равняться mn (разумеется, до приведения подобных!). Скажем, в рассмотренном примере мы перемножали трёхчлен на двучлен и до приведения подобных получили алгебраическую сумму шести произведений. После приведения подобных количество членов произведения у нас уменьшилось до четырёх.

В некоторых произведениях многочленов подобных членов нет, а в некоторых их количество очень большое. Рассмотрим два примера.

Умножим многочлен $2a^2 - 3ab + b$ на многочлен $b - 2$. Будем выполнять умножение не так, как в разобранном примере, а по-другому – первым из описанных выше способов. Получим:

$$(2a^2 - 3ab + b) \cdot (b - 2) = 2a^2 \cdot b - 2a^2 \cdot 2 - 3ab \cdot 2 + b \cdot b - b \cdot 2 =$$
$$= 2a^2b - 4a^2 - 3ab^2 + 6ab + b^2 - 2b.$$

Как видно, подобных членов в полученном произведении не оказалось.

Умножим теперь многочлен $4a^2 - 2ab + b^2$ на многочлен $2a + b$. Для разнообразия будем выполнять умножение вторым из описанных выше способов:

$$(4a^2 - 2ab + b^2) \cdot (2a + b) = 4a^2 \cdot 2a - 2ab \cdot 2a + b^2 \cdot 2a + 4a^2 \cdot b - 2ab \cdot b + b^2 \cdot b =$$
$$= 8a^3 - 4a^2b + 2ab^2 + 4a^2b - 2ab^2 + b^3 = 8a^3 + b^3.$$

В этом примере было две пары подобных членов, более того, после приведения подобных найденное произведение оказалось двучленом.

Произведение многочленов не зависит от порядка многочленов-сомножителей. Например:

$$(2x^2 - 3xy + 7y + 2) \cdot (3xy - y^2 - 4x) = (3xy - y^2 - 4x) \cdot (2x^2 - 3xy + 7y + 2).$$

Обычно перемножают многочлены стандартного вида. Если же приходится перемножать многочлены, не имеющие стандартного вида, то полезно сначала записать их в стандартном виде, а затем выполнять умножение – вычисления при этом будут проще.

Степень произведения двух ненулевых многочленов равна сумме степеней многочленов-сомножителей.

Можно находить произведение нескольких многочленов. При этом, так же, как и для чисел, для многочленов выполняется сочетательный закон умножения. Например:

$$\big((2x-5) \cdot (4x+1)\big) \cdot (3x-4) = (2x-5) \cdot \big((4x+1) \cdot (3x-4)\big).$$

Знак умножения (точку) в произведении многочленов часто не пишут. Так, можно писать $(3x - 1) \cdot (2x + 9)$, а можно $(3x - 1)\,(2x + 9)$.

Умение перемножать многочлены является очень важным в алгебре. Но гораздо важнее противоположное умение: записывать многочлен в виде произведения нескольких многочленов, или, как принято говорить, раскладывать многочлен на множители. Немного мы поговорим об этом в следующем параграфе, а подробно рассмотрим этот вопрос лишь в следующей главе.

Н

1 Закончите предложения.

а) Произведением многочлена на многочлен называется ...

б) Степень произведения двух ненулевых многочленов равна ...

2 Как связаны между собой произведение первого многочлена на второй многочлен и произведение второго многочлена на первый многочлен?

3 а) Какую степень имеет произведение многочлена 3-й степени на многочлен 4-й степени?

б) При умножении многочлена 2-й степени на некоторый второй многочлен получился многочлен 6-й степени. Что можно сказать о степени второго многочлена?

4 Выполните умножение:

а) $(4 - p + 3p^2) \cdot (1 - 2p)$;

б) $(5 - 6h + 8h^2) \cdot (2 - 3h)$;

в) $(5 - 8d - 9d^2) \cdot (10 + 4d)$;

г) $(-11j - 4j^2) \cdot (-5 - 2j)$;

д) $(3n^2 - 2 - 2n) \cdot (9 - 3n)$;

е) $(3l - 2) \cdot (9 + 10l - 4l^2)$;

ж) $(10p + 4) \cdot (2 - 4p + 5p^2)$;

з) $(3 + 5f) \cdot (4 - 4f - 7f^2)$.

5 Запишите произведение в виде многочлена:

а) $(2t^3 - 3t^2 - 5) \cdot (3t - 1)$;

б) $(7h^9 - 10 + 7h^2) \cdot (9 - 3h)$;

в) $(5c^3 + 2c^7 - 8c^8) \cdot (7c^2 + 9)$;

г) $(-9x + 10) \cdot (2x^9 - x^6 - 6x^{10})$;

д) $(4t^8 - 1 + 8t^3) \cdot (6 + t^3)$;

е) $(4r^2 + 10r^3 - 8r^9) \cdot (5r^3 + 5r)$;

ж) $(6k^2 + 7) \cdot (5k^2 - 8k^3 + 10k^4)$;

з) $(4x^5 - 5x^6 + 2x^8) \cdot (-9x^5 + 7)$.

6 Определите степень произведения, не выполняя умножения:

а) $(5z^4 - u^3z - 8) \cdot (-7zu + 3z^2 - u^2 - 7z - 5)$;

б) $(3d^6 - 7d^8) \cdot (10d^6 + 10d^8 - 10d^6r^5 + 8d^9r^9 + 13dr^{10})$;

в) $(2h^2 + k^{10}) \cdot (-2h^2 - 9h^7k^3 + 10h^9k^8 + 3k^{10} - 10h^{10}k^{10})$;

г) $(-6j^3 - 9b^7j^5 - 3b^8j^8 + 7b^3j^9 + 4j^{10}) \cdot (5j^3 + 7b^7j^5 + b^8j^8)$;

д) $(-e^4p^4 - 5e^4p^8 + 9p^9) \cdot (-10e^4p^4 - 8e^8p^6 - 9e^4p^8 - p^9)$;

е) $(3v^2 - 7j^5) \cdot (2j^9 + 9j^5v^2 - 10j^6v^2 + 9j^2v^5)$.

Н

7 Выполните умножение:

а) $(a+b)\cdot(a+c)$;
б) $(-8t-l)\cdot(10t+2l)$;
в) $(2u^2-5t^2)\cdot(6u^2+9t^2)$;
г) $(-1-8f)\cdot(-7-5f)$;
д) $(4v-3d)\cdot(5v+5d)$;
е) $(2-6v^2)\cdot(-10+7v^2)$;
ж) $(f+g)\cdot(f-g)$;
з) $(10F-2f)\cdot(10F+9f)$.

8 Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $(3x-2)(2x-3)$;
б) $(4p+3)(9p-8)$;
в) $(10n-1)(-7n+9)$;
г) $(7c+2)(8c-5)$;
д) $(a^2-2a+1)(a^2+2a+1)$;
е) $(2-10r-9t^2)(t^2-2-t)$;
ж) $(-10+6w-3w^2)(-6+w+3w^2)$;
з) $(8l^2+5-10l)(l+4+7l^2)$.

9 Раскройте скобки:

а) $(x-2)(x-3)(x+4)$;
б) $c(1+c)(7+c)$;
в) $(v-5)(3+v)(v+9)$;
г) $(a-5)(3+a)(10+a)$;
д) $(1+b)(3+b)(4+b)$;
е) $(u-10)(u-5)(u-1)$;
ж) $(k-1)(3+k)(10+k)$;
з) $(r-7)(r-4)(3+r)$.

10 Упростите выражение:

а) $(z-2)(7z+4z^2)+(2z^2-3)(1-2z)$;
б) $(3-6s)(1-4s+9s^2)-(9-3s)(-7+5s+5s^2)$;
в) $(-10-3a-9a^2)(9-a)-(-7-10a)(7-3a)$;
г) $-(-2+4j)(-2-5j)+(-10+17j)(7-4j)$;
д) $-(5p-9)(2-7p-6p^2)-(8p^2+4-8p)(7-8p)$;
е) $-(-2-3y^2)(14y^2+3)+(4-11y^2)(9-9y^2)$.

11 Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $(x^2-x+1)(x+1)$;
б) $(s-1)(s^2+s+1)$;
в) $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$;
г) $(m+n+k)(m-n+k)$;

д) $(2a + x + 3y)(2a - x + 3y)(2a + x - 3y)$;

е) $(5e + 3e^2)(e - 7e^2)(2e + 12e^2)$;

ж) $(6j^3 - 8j + 2j^2)(8j^2 - 4j^3)$;

з) $(9 + 3r + 7r^2)(10 + 3r + 5r^2)$.

П

12 Убедитесь, что при любых значениях переменной a:

а) значение выражения $(a - 3)(a + 4) - (a + 6)(a - 5)$ равно 18;

б) значение выражения $(n - 7)(n - 6) + (n - 12)(1 - n)$ равно 30;

в) значение выражения $(k - 9)(k + 6) - (k - 4)(k + 1)$ равно -50;

г) значение выражения $(3 + p)(7 + p) - (p + 19)(p - 9)$ равно 192.

13 Убедитесь, что при любых значениях переменных значение выражения одно и то же:

а) $(3x - 1)(y + 1) - (3x + 1)(y - 1) - 6x + 2y$;

б) $(7 + 10p + 3p^2)(3 + 8p) - 51p^2 - (3 + 10p + 4p^2)(-7 + p) - 153p - 28p^3$;

в) $12f^2 + (10 + f)(6f - 3) - (2f - 5)(12 + 9f) - 78f$;

г) $j^2(70j^2 - 4) + 7j^2(3 - 10j^2) - 17j^2$.

14 Упростите выражения, воспользовавшись предварительно указанной заменой:

а) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 2x - 6)(x^2 - 2x - 1)$,
замена $x^2 - 2x = y$;

б) $(4 + 7s - 5s^2)(10 + 7s - 5s^2) - (7s - 5s^2 + 4)(7s - 5s^2 - 7)$,
замена $7s - 5s^2 = q$;

в) $(6d^2 - 12d - 6)(6d^2 - 12d - 2) - (6d^2 - 12d)(6d^2 - 12d - 3)$,
замена $6d^2 - 12d = w$;

г) $(18f^2 + 5f + 1)(18f^2 + 5f - 1) - (18f^2 + 5f - 4)(18f^2 + 5f)$,
замена $18f^2 + 5f + 1 = g$.

М

15 Может ли произведение двучлена и трёхчлена после приведения подобных быть:

а) двучленом; б) трёхчленом; в) четырёхчленом; г) пятичленом; д) одночленом?

2.5 Деление многочлена на одночлен

Знакомимся с новой темой

Говорят, что *многочлен делится на одночлен*, если найдётся такой второй многочлен, произведение которого с одночленом равно начальному многочлену. Этот второй многочлен называется *частным* начального многочлена и одночлена. Начальный многочлен в рассматриваемой ситуации естественно называть делимым.

Например, многочлен $x^2 - 2x + 3$ является частным многочлена $2x^4 - 4x^3 + 6x^2$ и одночлена $2x^2$, т.к. $(x^2 - 2x + 3) \cdot 2x^2 = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2$.

Это можно записать с помощью двоеточия:

$$(2x^4 - 4x^3 + 6x^2) : 2x^2 = x^2 - 2x + 3$$

и с помощью дробной черты:

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 6x^2}{2x^2} = x^2 - 2x + 3.$$

Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

Многочлен делится на одночлен, если на этот одночлен делится каждый член многочлена.

Напомним, что условие делимости одночлена на одночлен было рассмотрено в параграфе 1.7.

В алгебре очень часто применяется преобразование многочлена, называемое *вынесение одночлена за скобки* (говорят также, как ранее вы говорили для чисел, вынесение за скобки общего множителя).

Ясно, что в многочлене стандартного вида за скобки можно вынести такой одночлен, на который этот многочлен делится. А для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы на выносимый за скобки одночлен делились все члены многочлена. Попробуем разобраться, как подобрать одночлен, который можно вынести за скобки в ненулевом многочлене.

Прежде всего за скобки можно вынести любое действительное число, отличное от нуля, т.е. одночлен нулевой степени. Например:

$$4a^3 - 8ab + 2ab^2 = 2\,(2a^3 - 4ab + ab^2),$$

$$\text{или } 4a^3 - 8ab + 2ab^2 = -7\left(-\frac{4}{7}a^3 + \frac{8}{7}ab - \frac{2}{7}ab^2\right),$$

$$\text{или } 4a^3 - 8ab + 2ab^2 = \frac{2}{3}\,(6a^3 - 12ab + 3ab^2).$$

Выясним теперь, как подобрать (и можно ли подобрать) выносимый за скобки одночлен, степень которого больше нуля. Если буквенная часть такого одночлена содержит какую-нибудь букву, то эта буква должна содержаться в каждом члене многочлена, причём с показателем степени не меньшим, чем показатель степени этой буквы в выносимом за скобки одночлене. Если же таких букв нет, то за скобки можно вынести только числовой множитель (многочлен нулевой степени).

Таким образом, можно сформулировать правило. За скобки в многочлене стандартного вида можно вынести одночлен, буквенная часть которого состоит из букв, входящих во все члены многочлена, причём с наименьшим показателем степени из всех встретившихся. При этом коэффициент выносимого за скобки одночлена может быть любым действительным числом, отличным от нуля.

Например, в рассмотренном многочлене $4a^3 - 8ab + 2ab^2$ во всех его членах содержится буква a, причём наименьший показатель степени этой буквы равен 1. Значит, за скобки можно вынести одночлен a. Естественно, в скобках при этом будет стоять частное многочлена $4a^3 - 8ab + 2ab^2$ и одночлена a:

$$4a^3 - 8ab + 2ab^2 = a\,(4a^2 - 8b + 2b^2).$$

Обратите внимание, что после вынесения в многочлене за скобки одночлена, по сформулированному нами правилу, в оставшемся в скобках многочлене уже нельзя вынести за скобки никакого буквенного множителя.

Можно сказать, что за скобки вынесен одночлен наибольшей возможной степени.

Если все коэффициенты многочлена – целые числа, то обычно в качестве коэффициента выносимого за скобки одночлена берут наибольший общий делитель их модулей (иногда к тому же с противоположным знаком).

Например, в нашем случае:

$$4a^3 - 8ab + 2ab^2 = 2a\,(2a^2 - 4b + b^2).$$

Рассмотрим ещё несколько примеров вынесения одночлена за скобки:

$$5m^2n^3 - 2m^4n^2 = m^2n^2\,(5n - 2m^2);$$
$$16x^2y + 8xy^2 - 12xyz = 4xy\,(4x + 2y - 3z).$$

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложения.

а) Частным многочлена и одночлена называется ...

б) Многочлен делится на одночлен, если ...

в) Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно ...

2 Как, зная частное многочлена и одночлена и этот одночлен, найти многочлен?

3 На одночлен какой степени можно разделить любой многочлен?

4 Выполните деление многочлена на одночлен:

а) $(4u^3 - 12u^2) : 2u^2$;
б) $(19v - 11v^2) : v$;
в) $(8e^{10} + 16e^4) : 8e^4$;
г) $(2b^2 - 2b^9) : 2b^2$;
д) $(20c^4 - 2c^7) : 10c^3$;
е) $(-5s^5 + 7s^8) : s^4$;
ж) $(20j^8 + 6j^3) : 6j$;
з) $(-r^4 - 9r^5) : (-r^3)$.

5 Запишите частное в виде многочлена:

а) $(6t^3u - 3t^3u^2 - 9t^2u) : (3t^2u)$;
б) $(19m^7u^2 + 12m^3u^5 - 14m^3u^2) : (m^3u^2)$;
в) $(10c^6 + 8s^2c^2 - 20c^4s^8) : (8c^2)$;
г) $(15x^4z^6 - 5x^7z^5 - 25x^3z^{10}) : (5x^3z^5)$;
д) $(6kw^8 - 6k^4w^3 + 24k^3w^8) : (6kw^3)$;
е) $(18h^9k^2 + 36h^2k^3 + 18hk^5) : (18hk^2)$;
ж) $(2b^2s^6 - 22b^{10}s^8 + 68b^4s^{10}) : (2b^2s^6)$;
з) $(15c^4f^8 + 15c^9f^6 - 3c^8f^8) : (3c^4f^6)$.

6 Выполните деление:

а) $(a^4b^3 + a^3b^4) : a^3b^3$;
б) $(13b^4c^8 - 11b^8c^8 + b^9c^9) : b^4c^8$;
в) $(5s^6z^3 + 19s^6z^4 - 20s^5z^6) : 5s^5z^3$;
г) $(19n^{20} - 15n^7 + 14n^{11}) : n^7$;
д) $(19f^7e^5 + 38ef^7 - 57e^{10}f^9) : 19f^7e$;
е) $(-h^4p^2 - h^7p^3 - h^9p^8) : (-h^4p^2)$;
ж) $(5f^3s^4 + 15s^9f + 5f^3s^{10}) : (5s^4f)$;
з) $(5a^{10}u^4 + 10a^8u^7 + 125a^8u^{10}) : (5a^8u^4)$.

7 Вынесите за скобки одночлен:

а) $ax + 3bx$;
б) $39b^2 + 6b^2y^2$;
в) $91d^2g + 28f^2g$;
г) $14abc - 21ca$;
д) $-54tw + 33p^2w$;
е) $60e^2t + 57mt$;
ж) $-66l^2z - 72l^2z^2$;
з) $119kmy - 56m^2y$.

Н

8 Вынесите общий множитель за скобки:

а) $3a^2b + 6ab^2$;
б) $28hw - 6h^2wz - 18h^2wz^2$;

в) $68kxyz + 68kxyz^2$;

г) $12k^5 + 15k^6$;

д) $p^3 - 4p^2q$;

е) $35l^3y^2 + 21l^3y^4$;

ж) $12mn^5 - 120n^5 - 4m^2n^5$;

з) $54m^3uw^2 - 51m^5uw^2$.

9 Запишите в виде произведения одночлена на многочлен:

а) $15xy^2 - 25xy + 20y^2$;

б) $169er^4 + 182e^3r^4 + 182e^2nr^4$;

в) $14a^2d^6 - 26a^2d^7 + 26a^2d^7z^2$;

г) $54hx - 42hx^2 - 42h^2x^2$;

д) $-60hlq + 65hl^3q + 5hl^2q^3$;

е) $-6j^2 + 42j^3y + 18j^3y^2$;

ж) $32j^2x^4 + 34j^3x^4 - 30j^4x^4$;

з) $9a^6x^4 + 9a^4x^5 + 72a^5x^5$.

10 Разложите многочлен на множители:

а) $6a^5 - 9a^4 - 12a^3$;

б) $-20h^4 - h^5 + h^6$;

в) $12s^3 + 7s^4 + s^5$;

г) $8q^2 + 6q^3 + q^4$;

д) $15p^2 - 8p^3 + p^4$;

е) $z^7 - 4z^5 - 3z^6$;

ж) $-3n^4 + n^6 - 2n^5$;

з) $3b^5 + 4b^6 + b^7$.

11 Вынесите за скобки общий множитель:

а) $18a^2x^2 + 6a^3x - 12a^2x^3$;

б) $36j^4n + 36j^2n^2 - 60j^4n^2$;

в) $17p^2y^2 + 4p^3y^3 - 18p^4y^4$;

г) $90h^3 + 27h^5 - 180h^6$;

д) $-55mq^3 - 50m^2q^3 - 95q^4$;

е) $-40n^3p^2 + 180n^2p^3 + 120n^4p^4$;

ж) $-12ku + 20k^2u - 20k^3u$;

з) $-40vw^2 + 70v^2w^2 + 10v^2w^4$.

12 Запишите в виде произведения:

а) $11x^2 + 16x^3 - 2x^5$;

б) $60w^8 - 48w^{13} + 15w^{15}$;

в) $32u^{17} + 40u^{28} + 32u^{30}$;

г) $70t^{28} - 95t^{36} + 25t^{40}$;

д) $28f^{117} - 133f^{119} + 77f^{126}$;

е) $11e^{12} - 11e^{18} + 165e^{21}$;

ж) $56s^{31} + 21s^{33} - 21s^{36}$;

з) $-5k^{1012} + 11k^{1015} - 18k^{1020}$.

П

13 Убедитесь, что:

а) $3^{10} - 3^9 + 3^{11}$ делится на 11;

б) $5^{19} - 2 \cdot 5^{18} + 3 \cdot 5^{17}$ делится на 18;

в) $6 \cdot 11^{73} + 2 \cdot 11^{71} - 7 \cdot 11^{72}$ делится на 651;

г) $-8 \cdot 17^{379} + 7 \cdot 17^{381} - 119 \cdot 17^{380}$ делится на 8.

14 Убедитесь, что сумма трёх последовательных натуральных степеней двойки делится на 7.

15 Чему равна степень частного многочлена и одночлена?

16 а) Какую степень имеет частное многочлена 5-й степени и одночлена 4-й степени?

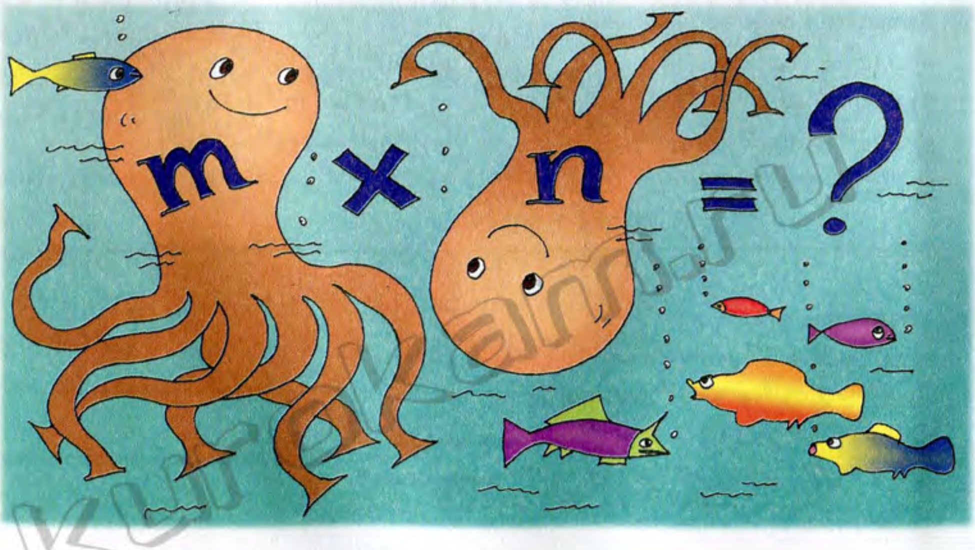
б) При делении многочлена 8-й степени на некоторый одночлен получился многочлен 4-й степени. Что можно сказать о степени одночлена?

17 Убедитесь, что сумма четырёх последовательных натуральных степеней пятёрки делится на 156.

18 На какое наибольшее натуральное число обязательно делится сумма трёх последовательных натуральных степеней тройки? А сумма четырёх последовательных натуральных степеней тройки?

19 Ознакомившись с правилом вынесения одночлена за скобки, семиклассник Валя сказал, что буквенная часть выносимого за скобки одночлена является наибольшим общим делителем буквенных частей всех членов этого многочлена. Согласны ли вы с Валей?

Исследовательский проект «Произведение двух многочленов». Перемножаются m-член и n-член стандартного вида. Сколько членов может содержать их произведение после приведения к стандартному виду? Поищите ответ сначала для небольших конкретных m и n.



ГЛАВА III ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

Вы уже умеете перемножать любые многочлены. Но иногда, причём весьма нередко, встречаются случаи, когда умножение можно выполнить быстрее, чем по общему правилу (т.е. сократить работу). Такие случаи принято записывать в виде специальных формул, называемых *формулами сокращённого умножения*. Такое название подчёркивает, что умножение по этим формулам можно выполнить более кратко (сокращённо), чем умножение по общим правилам умножения многочленов.

3.1 Квадрат суммы и квадрат разности

Вспоминаем то, что знаем

- Запишите выражение a. Запишите квадрат этого выражения.
- Запишите сумму выражений a и b. Запишите квадрат этой суммы.
- Запишите разность выражений a и b. Запишите квадрат этой разности.
- Запишите произведение выражений a и b. Умножьте полученное произведение на 2. Как бы вы назвали то, что получилось?

Открываем новые знания

- Закончите преобразование: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = \ldots$
- Прочитайте полученную формулу.
- Закончите преобразование: $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = \ldots$
- Прочитайте полученную формулу.

?! Чему равен квадрат суммы двух выражений?
Чему равен квадрат разности двух выражений?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Квадратом суммы называется выражение вида $(a + b)^2$ – сумма $(a + b)$ возводится в квадрат.

Преобразуем это выражение, т.е. выполним умножение многочлена $(a + b)$ на многочлен $(a + b)$:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Левую часть последнего равенства, т.е $(a + b)^2$, часто называют свёрнутым видом квадрата суммы, а правую часть, т.е. $a^2 + 2ab + b^2$, – развёрнутым видом квадрата суммы.

Ниже приведена геометрическая иллюстрация доказанной формулы. Большой квадрат со стороной $(a + b)$, площадь которого равна $(a + b)^2$, разрезан на квадрат со стороной a, площадь которого равна a^2, квадрат со стороной b, площадь которого равна b^2, и два прямоугольника со сторонами a и b, площадь каждого из которых равна ab.

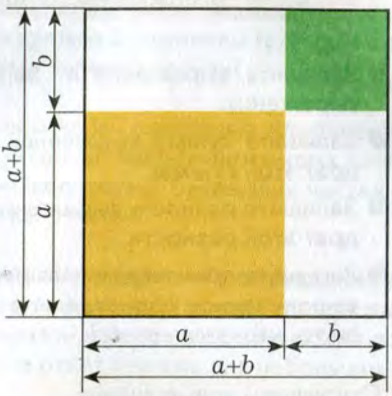


Рис. 1

Рассмотрим несколько примеров использования формулы квадрата суммы.

1) Найдём $(x + 3)^2$. Для этого в формуле квадрата суммы вместо a (говорят также «в качестве a» или «в роли a») возьмём x, а вместо b возьмём 3. Получим:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$$

2) Найдём $(2m + 5n)^2$. Для этого в формуле квадрата суммы вместо a возьмём $2m$, а вместо b возьмём $5n$. (Если ориентироваться не на формулу, а на её словесную формулировку, можно сказать по-другому: в качестве первого выражения возьмём $2m$, а в качестве второго выражения возьмём $5n$.) Получим:

$$(2m + 5n)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 5n + (5n)^2 = 4m^2 + 20mn + 25n^2.$$

3) Найдём $(3y^3 + u^2v)^2$. Для этого в формуле квадрата суммы двух выражений в качестве первого выражения возьмём $3y^3$, а в качестве второго выражения возьмём u^2v. Получим:

$$(3y^3 + u^2v)^2 = (3y^3)^2 + 2 \cdot 3y^3 \cdot u^2v + (u^2v)^2 = 9y^6 + 6y^3u^2v + u^4v^2.$$

Квадратом разности называется выражение вида $(a - b)^2$ – разность $(a - b)$ возводится в квадрат.

Выполнить преобразование этого выражения можно двумя способами.

Первый способ заключается в том, чтобы аналогично тому, как мы поступали при выводе формулы квадрата суммы, выполнить умножение двучлена $(a - b)$ на двучлен $(a - b)$:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Второй способ заключается в том, чтобы записать разность $a - b$ как сумму $a + (- b)$ и к ней применить формулу квадрата суммы:

$$(a - b)^2 = (a + (- b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Левую часть последнего равенства, т.е. $(a - b)^2$, часто называют свёрнутым видом квадрата разности, а правую часть, т.е. $a^2 - 2ab + b^2$, – развёрнутым видом квадрата разности.

Рассмотрим несколько примеров использования формулы квадрата разности.

1) Найдём $(t - 4)^2$. Для этого в формуле квадрата разности вместо a возьмём t, а вместо b возьмём 4. Получим:

$$(t - 4)^2 = t^2 - 2 \cdot t \cdot 4 + 4^2 = t^2 - 8t + 16.$$

2) Найдём $(7p - 3q^2)^2$. Для этого в формуле квадрата разности двух выражений в качестве первого выражения возьмём $7p$, а в качестве второго выражения возьмём $3q^2$. Получим:

$$(7p - 3q^2)^2 = (7p)^2 - 2 \cdot 7p \cdot 3q^2 + (3q^2)^2 = 49p^2 - 42pq^2 + 9q^4.$$

Формулы квадрата суммы и квадрата разности называют также формулами квадрата двучлена.

Научиться записывать вместо свёрнутого вида квадрата суммы или квадрата разности его развёрнутый вид гораздо проще, чем наоборот. Даже если вы забыли формулу, то при переходе от свёрнутого вида к развёрнутому можно просто умножить скобку на себя по общему правилу умножения многочленов, как мы делали выше при выводе формул.

Как научиться узнавать квадрат суммы или квадрат разности по его развёрнутому виду?

Если вы хотите понять, является ли данный трёхчлен квадратом некоторого двучлена, нужно сначала попытаться найти среди его членов два члена, являющиеся квадратами одночленов, и если это удалось сделать, найти удвоенное произведение этих одночленов и посмотреть, равно ли оно третьему члену данного трёхчлена (или является для него противоположным одночленом).

Приведём несколько примеров.

1) Рассмотрим трёхчлен $x^2 + 12x + 36$. Среди его членов сразу видно два квадрата: это x^2 (понятно, что это квадрат x) и 36 (это квадрат 6). Составим удвоенное произведение x и 6, получим $2 \cdot x \cdot 6$, т.е. $12x$. Видим, что удвоенное произведение как раз равно третьему члену рассматриваемого трёхчлена. Значит, этот трёхчлен равен квадрату суммы x и 6, т.е. $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

При разборе первого примера такого типа мы записали его решение максимально подробно, выписав все шаги. На практике всё делается гораздо быстрее, удвоенное произведение находится и сравнивается с третьим членом рассматриваемого трёхчлена устно.

2) Рассмотрим трёхчлен $4m^2+\frac{9}{4}-6m$. Среди его членов быстро находятся два квадрата: это $4m^2$ (квадрат $2m$) и $\frac{9}{4}$ (квадрат $\frac{3}{2}$). Составим удвоенное произведение $2m$ и $\frac{3}{2}$, получим $2\cdot 2m\cdot\frac{3}{2}$, т.е. $6m$. Видим, что составленное удвоенное произведение равно третьему члену рассматриваемого трёхчлена с противоположным знаком. Значит, этот трёхчлен равен квадрату разности $2m$ и $\frac{3}{2}$, т.е. $4m^2+\frac{9}{4}-6m=\left(2m-\frac{3}{2}\right)^2$.

3) Рассмотрим трёхчлен $9p^2 + 56pq + 49q^2$. Заметив, что $9p^2 = (3p)^2$, $49q^2 = (7q)^2$, составляем удвоенное произведение выражений $3p$ и $7q$: $2 \cdot 3p \cdot 7q = 42pq$. Поскольку составленное удвоенное произведение не равно третьему члену рассматриваемого трёхчлена, т.е. $56pq$, то этот трёхчлен не является квадратом двучлена.

Развиваем умения

Н

1 Запишите удвоенное произведение выражений:

а) x и 3;

б) $2x$ и $3y$;

в) -1 и $-2j^3$;

г) $5s$ и $-2s$;

д) $7v^3$ и $-8v$;

е) $-3lx$ и $-10x^3$;

ж) $10w$ и $8k$;

з) $-y^2$ и $2v^3y^3$.

2 Запишите квадрат суммы и квадрат разности для выражений (только в свёрнутом виде):

а) y и 2;

б) $7x$ и 3;

в) $8m^3$ и 7;

г) -6 и $10p$;

д) $2x$ и $3y$;

е) $5e$ и $4q$;

ж) $9t$ и $-3z$;

з) $2d$ и $-5d$.

3 Закончите предложения.

а) Квадрат суммы двух выражений равен ...

б) Квадрат разности двух выражений равен ...

4 Вычислите, применив формулу квадрата суммы или квадрата разности:

а) 72^2;
б) 31^2;
в) $3{,}2^2$
г) $6{,}3^2$;
д) $2{,}95^2$;
е) $9{,}99^2$;
ж) $7{,}06^2$;
з) $6{,}5^2$.

5 С помощью формулы квадрата суммы преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(n+6)^2$;
б) $(13h+1)^2$;
в) $(4+3y)^2$;
г) $(2l+8)^2$;
д) $(3p+7x)^2$;
е) $(2c+7d)^2$;
ж) $(10x+r)^2$;
з) $(9a+t)^2$.

6 С помощью формулы квадрата суммы преобразуйте выражение в многочлен:

а) $\left(3n+\frac{1}{3}\right)^2$;
б) $\left(8z+\frac{1}{4}\right)^2$;
в) $\left(12a+\frac{1}{2}\right)^2$;
г) $\left(14j+\frac{1}{7}\right)^2$;
д) $\left(\frac{5}{8}u+\frac{8}{5}k\right)^2$;
е) $\left(\frac{2}{3}c+6d\right)^2$;
ж) $\left(\frac{11}{4}y+4w\right)^2$;
з) $\left(18m+\frac{2}{9}n\right)^2$.

7 С помощью формулы квадрата разности преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(k-8)^2$;
б) $(5-7m)^2$;
в) $(13p-3)^2$;
г) $(5v-5)^2$;
д) $(2v-10a)^2$;
е) $(3c-2t)^2$;
ж) $(4z-7c)^2$;
з) $(11e-4u)^2$.

8 С помощью формулы квадрата разности преобразуйте выражение в многочлен:

а) $\left(2h-\frac{1}{4}\right)^2$;
б) $\left(10d-\frac{1}{5}\right)^2$;
в) $\left(\frac{4}{3}y-\frac{9}{8}\right)^2$;
г) $\left(3m-\frac{2}{3}\right)^2$;

д) $\left(\frac{7}{9}th - \frac{9}{7}g\right)^2$;

е) $\left(\frac{5}{6}dc - 3x\right)^2$;

ж) $\left(\frac{1}{7}q - 7ks\right)^2$;

з) $\left(\frac{4}{5}r - 5w\right)^2$.

Н

9 С помощью формулы квадрата суммы или разности преобразуйте в многочлен:

а) $(ab - cd)^2$;

б) $(3jt + 7gt)^2$;

в) $(-10uy - 3cv)^2$;

г) $(7kl - 9q)^2$;

д) $(-t + 2x)^2$;

е) $(3d - 4f)^2$;

ж) $(-11ak - 4)^2$;

з) $(6s - 5e)^2$.

10 Преобразуйте в многочлен:

а) $\left(\frac{5}{6}b - 0{,}3c\right)^2$;

б) $(0{,}125r + 8s)^2$;

в) $\left(6x - \frac{1}{3}x^2\right)^2$;

г) $(0{,}25yz - 8z)^2$;

д) $(-0{,}5q^3 + 0{,}4h)^2$;

е) $\left(\frac{3}{7}ab + \frac{7}{6}bc\right)^2$;

ж) $\left(-11n - \frac{1}{11}m\right)^2$;

з) $(0{,}8w^2 + 5j^2)^2$.

11 Запишите выражение в виде квадрата:

а) $16x^2$;

б) $144z^2$;

в) $9n^6$;

г) $64c^{10}k^2$;

д) $b^{16}k^8$;

е) p^2q^4;

ж) $\frac{36}{49}j^2m^2$;

з) $\frac{4}{9}m^8$.

12 Запишите многочлен в виде квадрата суммы:

а) $m^2 + 6m + 9$;

б) $16 + 56w + 49w^2$;

в) $100b^2 + 4 + 40b$;

г) $169j^2 + 286j + 121$;

д) $81 + 54a + 9a^2$;

е) $64c^2 + 48c + 9$;

ж) $m^2 + 8mn + 16n^2$;

з) $16r^2 + 40r + 25$.

13 Запишите многочлен в виде квадрата разности:

а) $c^2 - 4c + 4$;

б) $49 - 84j + 36j^2$;

в) $36r^2 - 12r + 1$;

г) $49 - 42c + 9c^2$;

д) $\frac{4f^2}{9} - \frac{16fl}{15} + \frac{16l^2}{25}$;

е) $\frac{e^2}{4} - 2ei + 4i^2$;

ж) $64k^2 - 128kz + 64z^2$;

з) $12{,}25 + 14h + 4h^2$.

14 Запишите многочлен в виде квадрата суммы или квадрата разности:

а) $\frac{l^2}{9} + \frac{lp}{3} + \frac{p^2}{4}$;

б) $49 - 28a + 4a^2$;

в) $25a^2 + 100ad + 100d^2$;

г) $4x^2 + 81 - 36x$;

д) $100k^2 - 140k + 49$;

е) $\frac{441}{25} + x^2 + \frac{42x}{5}$;

ж) $\frac{25z^2}{16} + \frac{64w^2}{9} - \frac{20wz}{3}$;

з) $49e^2 + 42e^2l + 9e^2l^2$.

15 Запишите многочлен в виде квадрата двучлена:

а) $9m^2 + 6m + 1$;

б) $49 - 70d + 25d^2$;

в) $64u^2 + 16f^2u^2 - 64fu^2$;

г) $\frac{9a^2}{16} + \frac{6ac}{5} + 0{,}64c^2$;

д) $6{,}25q^2 - 5qw + w^2$;

е) $\frac{81a^2}{4} + 9ai + i^2$;

ж) $4x^2 - 3xy + 2{,}25y^2$;

з) $16 + 56ls + 49l^2s^2$.

16 Является ли многочлен квадратом какого-нибудь двучлена:

а) $80 + 36h + 4h^2$;

б) $16 + 36p^2 - 48p$;

в) $4x^2 - 10xy + 25y^2$;

г) $-4m^2 + 24m^2z + 36m^2z^2$;

д) $\frac{36e^2}{49} - \frac{36el}{35} + \frac{9l^2}{23}$;

е) $4g^6u^2 + 24g^7u^2 + 36g^8u^2$;

ж) $-9t^2 - 42t - 49$;

з) $4r^8x^6 + 4r^6x^7 + r^4x^8$?

П

17 Запишите в виде квадрата:

а) $(m + 1)^2 + 2(m + 1) + 1$;

б) $(z - y)^2 - 2(z - y)(z + y) + (z + y)^2$;

в) $12rq + 4(r + 2s)^2 + 9q^2 + 24sq$;

г) $64 - 12f + \frac{9f^2}{16} + 64h - 6fh + 16h^2$;

д) $4u^2 + 8uv + 4v^2 - 20uz - 20vz + 25z^2$;

е) $x^2 - 2xy + y^2 + 2(x - y) + 1$;

ж) $36h + 49(2 - g)^2 + 9h^2 + 42(2 - g)(2 + h) + 36$;

з) $4 - 4a + a^2 + 4c - 2ac + c^2$.

18 С помощью рисунка дайте геометрическую иллюстрацию вывода формулы квадрата разности $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

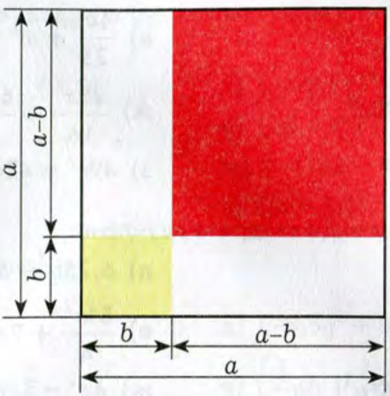


Рис. 2

19 Выведите формулу квадрата суммы трёх выражений:
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

М

20 Выведите формулу квадрата суммы четырёх выражений:
$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$.

21 Семиклассник Вася предложил следующую формулу квадрата суммы нескольких выражений: «Квадрат суммы нескольких выражений равен сумме всех их квадратов плюс сумма всевозможных удвоенных произведений».

а) Справедлива ли предложенная Васей формула?

б) Сколько удвоенных произведений будет содержать предложенная Васей формула квадрата суммы пяти выражений? шести выражений? n выражений?

М

22 Семиклассник Валя предложил следующую формулу квадрата алгебраической суммы нескольких выражений: «Квадрат суммы нескольких выражений равен сумме всех их квадратов плюс сумма всевозможных удвоенных произведений с учётом знаков».

а) Верно ли записана предложенная Валей формула квадрата алгебраической суммы $a - b - c$:

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$?

б) Справедлива ли записанная выше формула квадрата алгебраической суммы $a - b - c$?

в) Сколько удвоенных произведений со знаком «+» и сколько со знаком «–» будет содержать предложенная Валей формула квадрата алгебраической суммы, если эта алгебраическая сумма содержит: 2 плюса и 2 минуса? 3 плюса и 4 минуса? m плюсов и k минусов?

г) Справедлива ли предложенная Валей формула в общем случае?

3.2 Выделение полного квадрата

Знакомимся с новой темой

Формулы квадрата суммы и квадрата разности позволяют в некоторых случаях выполнить очень важное преобразование, называемое *выделением полного квадрата* или *выделением квадрата двучлена*.

Рассмотрим, как это делается для многочлена второй степени с одной переменной.

Начнём с ситуации, когда коэффициент одночлена второй степени равен единице. Возьмём, к примеру, трёхчлен $x^2 + 6x + 14$. Вспомним развёрнутый вид формулы квадрата суммы: квадрат первого выражения плюс удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения. На роль квадрата первого выражения подходит x^2, причём в качестве этого «первого выражения» можно взять x. Теперь ключевой момент дальнейшего преобразования: представим член $6x$ нашего многочлена как удвоенное произведение x на некоторое выражение. Чтобы понять, на какое же именно, нам придётся ответить на вопрос: «На какое выражение нужно умножить произведение $2 \cdot x$, чтобы в результате получилось $6x$?» Ответ очевиден: «На 3, ведь $6x = 2 \cdot x \cdot 3$».

Таким образом, мы пока выполнили следующее преобразование:

$$x^2 + 6x + 14 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 14.$$

Первые два члена полученного выражения представляют собой квадрат x плюс удвоенное произведение x на 3. До квадрата суммы ещё не хватает квадрата 3.

Прибавим и вычтем квадрат 3. Ясно, что в результате получим выражение, равное начальному, лишь записанное в другом виде:

$$x^2 + 6x + 14 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 14 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 14.$$

Первые три члена полученного выражения представляют собой развёрнутый вид записи квадрата суммы двучлена $(x + 3)$. Последние два члена являются подобными, и мы можем их привести. Получим:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 14 = (x + 3)^2 - 9 + 14 = (x + 3)^2 + 5.$$

Первое слагаемое в полученном выражении является квадратом двучлена, а второе – действительным числом. Именно этим объясняются названия выполненного нами преобразования: выделение квадрата двучлена или выделение полного квадрата.

Рассмотрим ещё несколько примеров.

1) $x^2 - \frac{5}{7}x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{14} + \left(\frac{5}{14}\right)^2 - \left(\frac{5}{14}\right)^2 + 1 = \left(x - \frac{5}{14}\right)^2 - \frac{25}{196} + 1 =$
$= \left(x - \frac{5}{14}\right)^2 + \frac{171}{196}.$

2) $x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{2}{5} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{2}{5} = \left(x + \frac{8}{3}\right)^2 - \frac{64}{9} + \frac{2}{5} =$
$= \left(x + \frac{8}{3}\right)^2 - \frac{302}{45}.$

3) $x^2 - 11x + 30{,}25 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5{,}5 + 5{,}5^2 - 5{,}5^2 + 30{,}25 =$
$= (x - 5{,}5)^2 - 30{,}25 + 30{,}25 = (x - 5{,}5)^2.$

Понятно, что в двучлене, квадрат которого возникает в результате преобразования, одним членом является x, а другим членом – половина коэффициента при x в начальном многочлене.

Последний пример также показывает, что если в начальном трёхчлене мы не узнали развёрнутого вида квадрата суммы или разности, то в результате выделения полного квадрата мы его заметим, вернее, он возникнет сам.

Выделение полного квадрата можно выполнять для любого многочлена второй степени с одной переменной. Проще всего для этого вынести за скобку коэффициент одночлена второй степени, затем выполнить в скобке выделение полного квадрата, как мы делали ранее, а затем раскрыть скобки:

$$3x^2 + 4x - 1 = 3 \cdot \left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1\right) =$$
$$= 3 \cdot \left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - 1\right) = 3 \cdot \left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{13}{9}\right) = 3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{13}{3}.$$

Выделение полного квадрата используется при решении многих задач. Мы встретимся с этим преобразованием ещё неоднократно, в том числе уже в ближайших параграфах.

Развиваем умения

Н

1 Запишите в виде удвоенного произведения числового и буквенного выражений:

а) $8x$; в) m; д) $-6mt$; ж) $\frac{6}{11}x$;

б) $15y$; г) $5x$; е) $2z$; з) $0{,}134g$.

2 Выделите полный квадрат:

а) $y^2 - 2y$; д) $25g^2 - 30g$;

б) $r^2 - 28r$; е) $\frac{9h^2}{4} + 3h$;

в) $64m^2 + 160m$; ж) $4e^2 - 4e$;

г) $a^2 + 10a - 5$; з) $9w^2 - 42w$.

3 Выполните выделение квадрата двучлена:

а) $t^2 + t + 1$; д) $10e^2 - 7e + 10$;

б) $e^2 + 9e + 5$; е) $16c^2 + 5c - 2$;

в) $8 - 7m + m^2$; ж) $2p + p^2 - 9$;

г) $z^2 - 4z - 7$; з) $-5 - 4b + b^2$.

Н

4 Выделите квадрат двучлена:

а) $x^2 + \frac{1}{6}x - 2$; д) $\frac{u^2}{25} - \frac{5u}{7} - \frac{1}{13}$;

б) $-\frac{2}{3} + \frac{u}{5} + u^2$; е) $m^2 - \frac{4m}{7} + \frac{57}{98}$;

в) $s^2 + \frac{11s}{6} - \frac{23}{144}$; ж) $j^2 - \frac{9j}{2} + \frac{5}{16}$;

г) $\frac{20}{3} + j^2 - 8j$; з) $\frac{1}{2} + \frac{4r^2}{25} + \frac{10r}{9}$.

5 Выделите полный квадрат:

а) $6x^2 + 24x$;

б) $6 - 10b + 18b^2$;

в) $50w^2 + 7 + 20w$;

г) $54c^2 - 18c + 3$;

д) $1 - 28t - 567t^2$;

е) $10a^2 + 30a - 8$;

ж) $8 + 216y^2 - 54y$;

з) $7 - 18h + 32h^2$.

6 Выделите квадрат двучлена:

а) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$;

б) $-2 - \frac{14t}{3} + \frac{8t^2}{3}$;

в) $\frac{64l^2}{3} + 1 + 8l$;

г) $\frac{7l^2}{9} - \frac{14l}{9} - 2$;

д) $\frac{27b^2}{2} - \frac{15b}{2} - 4$;

е) $\frac{2}{3}a^2 - 8a + 24$;

ж) $\frac{2z^2}{5} + 4 + \frac{z}{10}$;

з) $8 + \frac{32y^2}{5} - \frac{48y}{5}$.

7 Выполните выделение полного квадрата:

а) $-0{,}7y^2 + 14y + 3$;

б) $2{,}8i^2 + 7i + 9$;

в) $0{,}8y^2 - y - 5$;

г) $-10 + 37{,}5f^2 - 1{,}5f$;

д) $-1{,}9g^2 - 17{,}1g + 5$;

е) $-5 + 10{,}5x - 73{,}5x^2$;

ж) $14{,}4h^2 + 1{,}6h + 4$;

з) $-14{,}7m^2 + 2{,}7m + 4$.

П

8 Убедитесь, что выражение положительно при всех значениях переменной:

а) $x^2 + 4x + 5$;

б) $18e^2 + 60e + 51$;

в) $125v^2 - 150v + 52$;

г) $3x^2 + 8x + 6$.

9 Убедитесь, что выражение неотрицательно при всех значениях переменной:

а) $x^2 + 12x + 36$;

б) $7 + 16k + 32k^2$;

в) $45z^2 - 90z + 45$;

г) $4x^2 + 7x + 7$.

10 Убедитесь, что выражение отрицательно при всех значениях переменной:

а) $-x^2 + 2x - 2$;

б) $-18 + 80z - 100z^2$;

в) $-64p^2 - 42 + 96p$;

г) $-18d^2 - 12d - 12$.

11 Найдите наименьшее значение выражения. Установите, при каком значении переменной выражение принимает наименьшее значение:

а) $x^2 - 14x + 1$;

б) $158 + 80y + 10y^2$;

в) $24j^2 + 120j + 134$;

г) $2a^2 + 5a + 9$.

12 Найдите наибольшее значение выражения. Установите, при каком значении переменной выражение принимает наибольшее значение:

а) $-x^2 + 8x + 1$;

б) $-63r^2 - 61 + 126r$;

в) $-20b^2 + 60b - 60$;

г) $-3m^2 - 4m$.

М

13 Найдите наименьшее значение выражения. Установите, при каких значениях переменных выражение принимает наименьшее значение:

а) $x^2 + y^2 + 2y$;

б) $12 - 12x + 4x^2 - 4y + y^2$;

в) $28y^2 + 30x + 5x^2 - 112y + 174$;

г) $2a^2 + b^2 + 5a - 6b - 1$.

3.3 Куб суммы и куб разности

Вспоминаем то, что знаем

- Запишите выражение a. Запишите куб этого выражения.
- Запишите сумму выражений a и b. Запишите куб этой суммы.
- Запишите разность выражений a и b. Запишите куб этой разности.
- Запишите произведение квадрата выражения a на выражение b.
- Умножьте полученное произведение на 3. Как бы вы назвали то, что получилось?

Открываем новые знания

- Закончите преобразование: $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = \ldots$
- Прочитайте полученную формулу.

● Закончите преобразование: $(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = \ldots$

● Прочитайте полученную формулу.

?! Чему равен куб суммы двух выражений?
Чему равен куб разности двух выражений?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Аналогично тому, как были выведены формулы квадрата суммы и квадрата разности, можно вывести формулы куба суммы и куба разности.

Так, для куба суммы:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Таким образом, выведена формула:

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения.

Аналогично тому, как это делалось для квадрата суммы, говорят о свёрнутом виде куба суммы, т.е. выражении $(a + b)^3$, и о развёрнутом виде куба суммы, т.е. выражении $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Найдём $(x + 4)^3$. Для этого в формуле куба суммы вместо a возьмём x, а вместо b возьмём 4. Получим:

$$(x + 4)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64.$$

2) Найдём $(5m + 2n)^3$. Для этого в формуле куба суммы вместо a возьмём $5m$, а вместо b возьмём $2n$. Можно сказать по-другому: в формуле куба суммы в качестве первого выражения возьмём $5m$, а в качестве второго выражения возьмём $2n$. Получим:

$$(5m + 2n)^3 = (5m)^3 + 3 \cdot (5m)^2 \cdot 2n + 3 \cdot 5m \cdot (2n)^2 + (2n)^3 =$$
$$= 125m^3 + 150m^2n + 60mn^2 + 8n^3.$$

3) Найдём $(3c^2 + dh)^3$. Для этого в формуле куба суммы двух выражений в качестве первого выражения возьмём $3c^2$, а в качестве второго выражения возьмём dh. Получим:

$$(3c^2 + dh)^3 = (3c^2)^3 + 3 \cdot (3c^2)^2 \cdot dh + 3 \cdot 3c^2 \cdot (dh)^2 + (dh)^3 =$$
$$= 27c^6 + 27c^2dh + 9c^2d^2h^2 + d^3h^3.$$

Формулу для куба разности можно получить двумя способами.

Во-первых, можно действовать аналогично тому, как выше мы действовали для куба суммы:

$$(a - b)^3 = (a - b)^2 \cdot (a - b) = (a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a - b) =$$
$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Во-вторых, можно записать разность $a - b$ как сумму $a + (-b)$ и к ней применить формулу куба суммы:

$$(a - b)^3 = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Итак, выведена формула куба разности:

$$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Рассмотрим несколько примеров.

1) Найдём $(c - 5)^3$. Для этого в формуле куба разности вместо a возьмём c, а вместо b возьмём 5. Получим:

$$(c - 5)^3 = c^3 - 3 \cdot c^2 \cdot 5 + 3 \cdot c \cdot 5^2 - 5^3 = c^3 - 15c^2 + 75c - 125.$$

2) Найдём $(4p - 3q^2)^3$. Для этого в формуле куба разности двух выражений в качестве первого выражения возьмём $4p$, а в качестве второго выражения возьмём $3q^2$. Получим:

$$(4p - 3q^2)^3 = (4p)^3 - 3 \cdot (4p)^2 \cdot 3q^2 + 3 \cdot 4p \cdot (3q^2)^2 - (3q^2)^3 =$$
$$= 64p^3 - 144p^2q^2 + 108pq^4 - 27q^6.$$

Формулы куба суммы и куба разности называют также формулами куба двучлена.

Развиваем умения

Н

1 Запишите утроенное произведение квадрата первого выражения на второе и утроенное произведение первого выражения на квадрат второго:

а) x и 3; в) -7 и $-3s$; д) $2x$ и $3y$; ж) k^2 и m^2;

б) a и b; г) $3g$ и $5h$; е) $-7z$ и n; з) $-v$ и $3c$.

2 Запишите куб суммы и куб разности для выражений (только свёрнутый вид):

а) y и 2; б) a и $-b$; в) 5 и $2s$; г) $-x$ и $-n$; д) $2x$ и $3y$; е) l^2 и m^3; ж) 0,5u и $2v$; з) $-pq$ и qw.

3 Закончите предложения.

а) Куб суммы двух выражений равен ...

б) Куб разности двух выражений равен ...

4 Вычислите, применив формулу куба суммы или куба разности:

а) 21^3; б) 17^3; в) $3{,}2^3$; г) $5{,}3^3$; д) $2{,}9^3$; е) $7{,}7^3$; ж) 101^3; з) $(-3{,}9)^3$.

5 С помощью формулы куба суммы преобразуйте в многочлен:

а) $(n+1)^3$; б) $(4b+5)^3$; в) $(2+6x)^3$; г) $(g+4)^3$; д) $(1+3s)^3$; е) $(2c+3)^3$; ж) $(6+4c)^3$; з) $(3h+7)^3$.

6 С помощью формулы куба суммы преобразуйте в многочлен:

а) $(3n+2m)^3$; б) $(h+2w)^3$; в) $(5p+5t)^3$; г) $(6c+7l)^3$; д) $(2s+6z)^3$; е) $(c^2+6d)^3$; ж) $(3m+4z)^3$; з) $(5d+2y)^3$.

7 С помощью формулы куба разности преобразуйте в многочлен:

а) $(k-1)^3$; б) $(2b-7)^3$; в) $(-4+6f)^3$; г) $(3l-5)^3$; д) $(5m-4s)^3$; е) $(3c-2t)^3$; ж) $(7d-3e)^3$; з) $(6v-2a)^3$.

8 С помощью формулы куба разности преобразуйте в многочлен:

а) $(2h-4k)^3$; б) $(6xy-kz)^3$; в) $(7p-5st)^3$; г) $(-6hl-j^2)^3$; д) $(4c^2-5e^2)^3$; е) $(mn-3l)^3$; ж) $(2f-4m)^3$; з) $(-4m^2-2yz)^3$.

П

9 С помощью формулы куба суммы или куба разности преобразуйте в многочлен:

а) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$;

б) $\left(\frac{5v}{8}-\frac{7w}{6}\right)^3$;

в) $\left(\frac{3j}{4}+1\right)^3$;

г) $\left(\frac{u}{9}+\frac{3p}{8}\right)^3$;

д) $\left(-7h-\frac{y}{8}\right)^3$;

е) $\left(\frac{2}{3}ac+3m\right)^3$;

ж) $\left(\frac{9d}{8}+\frac{10i}{3}\right)^3$;

з) $\left(-\frac{4a}{7}+\frac{4e}{3}\right)^3$.

10 С помощью формулы куба суммы или куба разности преобразуйте в многочлен:

а) $(a^2b-cd^2)^3$;

б) $(8hr-2d^2rt)^3$;

в) $(2mp^{11}t^3+6m^2p^{11}t^8)^3$;

г) $(4e^8p^6w^3-6a^4e^7pw^6)^3$;

д) $\left(-\frac{5}{8}f^7w^6-\frac{5c^3x^9}{8}\right)^3$;

е) $\left(f^6i^7+\frac{3g^3v^8}{2}\right)^3$;

ж) $(6bm^3r+8b^6r^7)^3$;

з) $\left(\frac{5}{2}g^2i^{10}+\frac{5ms}{8}\right)^3$.

М

11 Выведите формулы для четвёртой степени суммы и разности.

12 Выведите формулы для пятой степени суммы и разности.

М

13 Придумайте геометрическую иллюстрацию для формул куба суммы и куба разности.

3.4 Разность квадратов

Вспоминаем то, что знаем

- Запишите разность выражений a и b, а также их сумму.
- Запишите произведение разности выражений a и b на их сумму.
- Запишите квадрат выражения a, квадрат выражения b, а также разность этих квадратов.

Открываем новые знания

- Закончите преобразование: $(a - b)(a + b) = \ldots$
- Прочитайте полученную формулу.

?! Чему равна разность квадратов двух выражений?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Запишем произведение разности двух выражений на их сумму, выполним умножение записанных многочленов и приведём подобные:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Полученное выражение $a^2 - b^2$ называется *разностью квадратов* выражений a и b.

Выведенную формулу обычно записывают в виде

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений на их сумму.

Ниже приведена геометрическая иллюстрация доказанной формулы. Площадь закрашенной фигуры на рис. 3 слева равна разности площадей квадратов со сторонами a и b, т.е. $a^2 - b^2$. Если эту фигуру разрезать по пунктирной линии и приложить левый прямоугольник к правому, как показано на рис. 3 справа, то получится прямоугольник со сторонами $(a - b)$ и $(a + b)$, площадь которого равна $(a - b)(a + b)$.

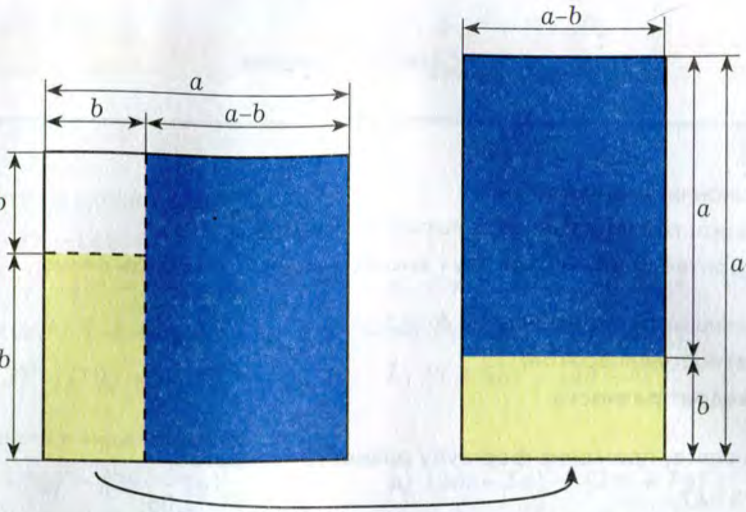


Рис. 3

Выведенная формула может быть использована для упрощения некоторых вычислений. Например:

$52 \cdot 48 = (50 + 2)(50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2\,500 - 4 = 2\,496;$

$87^2 - 13^2 = (87 - 13)(87 + 13) = 74 \cdot 100 = 7\,400.$

В качестве a и b в формуле разности квадратов могут быть взяты более сложные алгебраические выражения. Рассмотрим несколько примеров.

1) Найдём произведение $(5x + 3)(5x - 3)$. Поскольку в одной скобке стоит сумма выражений $5x$ и 3, а во второй скобке – разность этих же выражений, можно заменить это произведение на разность квадратов:

$$(5x + 3)(5x - 3) = (5x)^2 - (3)^2 = 25x^2 - 9.$$

2) Запишем выражение $(7c - 3)^2 - (5c + 2)^2$ в виде произведения. Заметим, что это выражение представляет собой разность квадратов двух выражений, где первым выражением является $7c - 3$, а вторым выражением является $5c + 2$. Получим:

$$(7c - 3)^2 - (5c + 2)^2 = ((7c - 3) - (5c + 2)) \cdot ((7c - 3) + (5c + 2)) =$$
$$= (7c - 3 - 5c - 2)(7c - 3 + 5c + 2) = (2c - 5)(12c - 1).$$

Разбирая первый пример такого типа, мы записали его решение максимально подробно, выписав все шаги. На практике, после приобретения некоторого опыта, преобразования выполняют гораздо быстрее, проводя многие упрощения устно, «на ходу».

3) Запишем в виде произведения выражение $m^4 - 49n^2$. Здесь прежде всего надо суметь увидеть разность квадратов, она не обозначена явно, как в предыдущем примере. Надо заметить, что выражение m^4 представляет собой квадрат выражения m^2, а выражение $49n^2$ представляет собой квадрат выражения $7n$. После этого можно записать:

$$m^4 - 49n^2 = (m^2)^2 - (7n)^2 = (m^2 - 7n)(m^2 + 7n).$$

Н

1 Закончите предложения.

а) Разность квадратов двух выражений равна ...

б) Произведение суммы двух выражений на их разность равно ...

2 Запишите для выражений $4x$ и $5y$:

а) разность квадратов;

б) квадрат разности.

3 Вычислите, применив формулу разности квадратов:

а) $73 \cdot 67$;

б) $105 \cdot 95$;

в) $6{,}2 \cdot 5{,}8$;

г) $12{,}7 \cdot 11{,}3$;

д) $2{,}95 \cdot 3{,}05$;

е) $7{,}98 \cdot 8{,}02$;

ж) $20{,}11 \cdot 19{,}89$;

з) $1001 \cdot 999$.

4 Вычислите, применив формулу разности квадратов:.

а) $236^2 - 235^2$;

б) $769^2 - 768^2$;

в) $76^2 - 74^2$;

г) $58^2 - 42^2$;

д) $27{,}89^2 - 26{,}89^2$;

е) $980^2 - 970^2$.

5 Убедитесь, что:

а) $57^2 - 22^2$ делится на 35;

б) $77^2 - 53^2$ делится на 120;

в) $95^2 - 89^2$ делится на 6;

г) $76^2 - 34^2$ делится на 110;

д) $698^2 - 80^2$ делится на 618;

е) $549^2 - 94^2$ делится на 643.

6 Запишите выражение в виде квадрата:

а) $25y^2$;

б) $64x^4$;

в) $9n^6$;

г) $196g^{10}$;

д) $h^2j^{12}k^{22}t^4$;

е) x^2y^4;

ж) $w^{10}u^{12}z^{14}$;

з) $\frac{289}{144}f^{28}$.

7 Представьте в виде произведения:

а) $25y^2 - 1$;

б) $196 - 81g^2$;

в) $4m^2 - 9n^2$;

г) $81h^2 - 4d^2$;

д) $64f^2g^2 - 49s^2$;

е) $x^2y^2 - 4$;

ж) $4m^{40} - 100x^{60}$;

з) $49v^2x^6 - 36c^4h^2$.

Н

8 Разложите на множители:

а) $(4x+3)^2 - (4x-5)^2$;

б) $(7c-7)^2 - (3c-7)^2$;

в) $(6+10e)^2 - (-4+7e)^2$;

г) $(8g-2)^2 - (10g-5)^2$;

д) $(9c-3)^2 - (8c+7)^2$;

е) $(9m-6)^2 - (3+3m)^2$;

ж) $(6+9u)^2 - (6+2u)^2$;

з) $(9+5b)^2 - (4b-4)^2$.

9 Представьте в виде произведения:

а) $(2x^2+3y)^2 - (2x^2-5y)^2$;

б) $(7a+10w^5)^2 - (10w^5-10a)^2$;

в) $(t-6y^5)^2 - (2t+8y^5)^2$;

г) $(6l^2+4s^3)^2 - (7l^2-10s^3)^2$;

д) $(5m-3n)^2 - (2m+7n)^2$;

е) $(d^2+9y)^2 - (d^2+3y)^2$;

ж) $(9g^3+2j^2)^2 - (3j^2-7g^3)^2$;

з) $(-2p^2+6s^3)^2 - (-3p^2+7s^3)^2$.

10 Представьте в виде произведения:

а) $(2x^2+7)^2 - 4x^4$;

б) $(9+7g^4)^2 - 36g^8$;

в) $49y^2 - (8y-1)^2$;

г) $(2+8d^4)^2 - 100d^8$;

д) $16n^6 - (5m^2-3n)^2$;

е) $9x^{10} - (9x-8)^2$;

ж) $49z^{14} - (u+7)^2$;

з) $16t^2 - (4t^2-2)^2$.

П

11 Упростите произведения, применяя формулу разности квадратов:

а) $(-x+5)(x+5)$;

б) $(-10+6b)(-10-6b)$;

в) $(8l+5)(-10+16l)$;

г) $(21s-12)(8+14s)$;

д) $(-2m-n)(n-2m)$;

е) $(8y-t)(-t-8y)$;

ж) $(16j+18l)(-8j+9l)$;

з) $(7g-2h)(-20h-70g)$.

12 Упростите произведения, применяя формулу разности квадратов:

а) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

б) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$;

в) $(5m-n)(5m+n)(n^2+25m^2)$;

г) $(ax+by)(ax-by)(a^2x^2+b^2y^2)$.

13 Упростите произведения, применяя формулу разности квадратов:

а) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$;

б) $\left(\frac{3}{2}u-\frac{7}{3}v\right)\left(\frac{3}{2}u+\frac{7}{3}v\right)\left(\frac{9}{4}u^2+\frac{49}{9}v^2\right)\left(\frac{81}{16}u^4+\frac{2\,401}{81}v^4\right)$;

в) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$.

14 Упростите произведения, применяя разные формулы:

а) $(x-1)^2(x+1)^2$;

б) $(x-1)^3(x+1)^3$;

в) $(5m-n)^2(5m+n)^2$;

г) $(a+b+c)^3(a+b-c)^3$.

15 Сравните ($>$, $<$, $=$):

а) 35^2 и $34 \cdot 36$;

б) 84^2 и 105^2-63^2;

в) $7{,}9 \cdot 7{,}7$ и $7{,}8^2$;

г) $12{,}68 \cdot 7{,}28$ и $9{,}98^2$.

М

16 Докажите, что из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

17 Разложите на множители, выделив полный квадрат:

а) x^2+8x+7;

б) $405+9k^2-126k$;

в) $144g^2-960g+1\,564$;

г) $4c^2-24c+35$.

3.5 Разность кубов и сумма кубов

Знакомимся с новой темой

Выражение a^3-b^3 называется *разностью кубов* выражений a и b.

Оказывается, разность кубов двух выражений можно записать в виде произведения двух сомножителей, один из которых равен разности этих выражений. Справедлива формула, называемая формулой разности кубов.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Второй множитель в правой части записанной формулы очень напоминает развёрнутый вид квадрата суммы, т.е. $a^2 + 2ab + b^2$, с тем лишь отличием, что квадрат суммы содержит удвоенное произведение выражений a и b, а этот множитель – просто их произведение. По этой причине выражение $a^2 + ab + b^2$ принято называть *неполным квадратом суммы* выражений a и b.

Формула разности кубов читается следующим образом.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы.

Для вывода этой формулы выполним умножение многочленов $a - b$ и $a^2 + ab + b^2$ и приведём подобные:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Выражение $a^3 + b^3$, называемое *суммой кубов* выражений a и b, можно записать в виде произведения двух сомножителей, один из которых равен сумме этих выражений.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Эта формула называется формулой суммы кубов, а второй множитель в правой части этой формулы, т.е. $a^2 - ab + b^2$, называется *неполным квадратом разности* выражений a и b.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.

Для вывода этой формулы поступим аналогично тому, как мы поступали при выводе формулы разности кубов: выполним умножение многочленов $a + b$ и $a^2 - ab + b^2$, после чего приведём подобные:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Развиваем умения

Н

1 а) Какое выражение называется неполным квадратом суммы выражений a и b? Чем объясняется такое название?

б) Чем отличается неполный квадрат суммы от квадрата суммы?

2 а) Какое выражение называется неполным квадратом разности выражений a и b? Чем объясняется такое название?

б) Чем отличается неполный квадрат разности от квадрата разности?

3 Запишите неполный квадрат суммы и неполный квадрат разности для выражений:

а) y и 2; в) -5 и $3k$; д) $2x$ и $3y$; ж) q^2 и p^3;

б) a и b; г) $2j$ и 1; е) $-u$ и $-f$; з) $2s^2$ и $4d^4$.

4 Закончите предложения.

а) Разность кубов двух выражений равна ...

б) Сумма кубов двух выражений равна ...

в) Произведение разности двух выражений на неполный квадрат их суммы равно ...

г) Произведение суммы двух выражений на неполный квадрат их разности равно ...

5 Запишите для выражений $4x$ и $5y$:

а) разность кубов; в) сумму кубов;

б) куб разности; г) куб суммы.

6 Убедитесь, что:

а) $79^3 - 32^3$ делится на 47; г) $26^3 + 14^3$ делится на 40;

б) $64^3 - 44^3$ делится на 8 848; д) $57^3 + 25^3$ делится на 2 449;

в) $89^3 - 47^3$ делится на 42; е) $43^3 + 19^3$ делится на 62.

7 Запишите выражение в виде куба:

а) $8y^3$; в) n^6; д) $u^{15}d^{45}h^{99}$; ж) $\frac{1000}{729}j^{27}$;

б) $343z^{12}$; г) m^{87}; е) x^3y^6; з) $\frac{125}{216}a^9$.

8 Представьте в виде произведения:

а) $27y^3 - 1$; д) $x^3y^3 - 8$;

б) $216s^6 + 512$; е) $j^3q^6v^3 + 343$;

в) $m^6 + n^3$; ж) $\frac{27}{8}x^3 + 8y^3$;

г) $125 - 64w^3$; з) $\frac{729}{8} - \frac{1}{27}t^3$.

9 Разложите на множители:

а) $125y^3 - 64x^3$;

б) $\frac{1}{8}d^{30} + \frac{512}{125}r^{60}$;

в) $\frac{1}{8}m^6 - 27n^3$;

г) $a^6 + b^6$;

д) $q^3p^{12}a^{15} - 343r^{51}$;

е) $\frac{27}{64} + \frac{125}{64}k^{102}$;

ж) $8f^3 - \frac{1}{27}f^{21}$;

з) $\frac{27}{8}y^6 + \frac{27}{64}h^9$.

Н

10 Разложите на множители:

а) $(4x)^3 + (x-1)^3$;

б) $(3+q)^3 + (3+5q)^3$;

в) $(p-1)^3 + (4+4p)^3$;

г) $(2t-1)^3 + (3t-1)^3$;

д) $(c+1)^3 - c^3$;

е) $(1+3d)^3 - (5-d)^3$;

ж) $(4g-2)^3 - (4+2g)^3$;

з) $(3k-5)^3 - (-3+k)^3$.

11 Укажите неполные квадраты суммы или разности:

а) $x^2 + 2x + 4$;

б) $z^4 - 3{,}1z^2 + 9$;

в) $t^2 + 5t + 25$;

г) $m^2 - 6m + 9$;

д) $u^6 + 13u^3 + 169$;

е) $g^2 - 4g + 4$;

ж) $w^2 + 7w + 49$;

з) $y^2 - 4y + 25$.

12 Запишите произведение в виде многочлена:

а) $(b-c)(b^2 + bc + c^2)$;

б) $(q+p)(q^2 - pq + p^2)$;

в) $(2e-3j)(4e^2 + 6ej + 9j^2)$;

г) $(5+l)(l^2 + 25 - 5l)$;

д) $(u-4v)(u^2 + 4vu + 16v^2)$;

е) $(m+2)(m^2 + 4 - 2m)$;

ж) $(7g-5f)(49g^2 + 35fg + 25f^2)$;

з) $(9+w)(w^2 - 9w + 81)$.

13 Преобразуйте в многочлен:

а) $(2u-1)(4u^2 + 2u + 1)$;

б) $\left(\frac{1}{3}w + 3\right)\left(\frac{1}{9}w^2 - w + 9\right)$;

в) $\left(\frac{7}{9}s^3 - \frac{9}{7}r^4\right)\left(\frac{49}{81}s^6 + s^3r^4 + \frac{81}{49}r^8\right)$;

г) $(q^{30} + h^{21})(q^{60} - q^{30} h^{21} + h^{42})$;

д) $(t^7 - t^3)(t^{14} + t^{10} + t^6)$;

е) $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$;

ж) $(2l^2 - 0{,}5m^2)(4l^4 + l^2 m^2 + 0{,}25m^4)$;

з) $(0{,}1x + 0{,}2y)\left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{50}xy + \frac{1}{25}y^2\right)$.

П

14 Представьте в виде произведения:

а) $(x + 3)^3 + (x - 3)^3$;

б) $(2i - l)^3 + \left(\frac{i}{5} - \frac{l}{2}\right)^3$;

в) $s^3 + \left(y - \frac{3s}{4}\right)^3$;

г) $\left(\frac{2i}{5} - 4d\right)^3 + \left(\frac{d}{2} - i\right)^3$;

д) $(5m - 3n)^3 - (5m + 3n)^3$;

е) $\left(\frac{5s}{4} - x\right)^3 - \left(s - \frac{3x}{2}\right)^3$;

ж) $\left(-5g - \frac{z}{5}\right)^3 - \frac{g^3}{8}$;

з) $\left(\frac{5a}{2} - \frac{4w}{3}\right)^3 - (a + 2w)^3$.

15 Упростите произведения, применяя несколько формул сокращённого умножения:

а) $(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$;

б) $\left(b - \frac{5s}{3}\right)\left(b + \frac{5s}{3}\right)\left(b^4 + \frac{25}{9}b^2s^2 + \frac{625}{81}s^4\right)$;

в) $(2m - n)(2m + n)(8m^2n^2 + n^4 + 64m^4)$;

г) $(aX + bY)(aX - bY)(a^4X^4 + a^2b^2X^2Y^2 + b^4Y^4)$.

16 Упростите произведения, применяя несколько формул сокращённого умножения:

а) $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$;

б) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}x + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{4}{25}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{25}{9}\right)\left(\frac{4}{25}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{25}{9}\right)$;

в) $(5m - n)(5m + n)(n^2 + 25m^2 + 5mn)(n^2 + 25m^2 - 5mn)$;

г) $(aX + bY)(aX - bY)(a^2X^2 - abXY + b^2Y^2)(a^2X^2 + abXY + b^2Y^2)$.

17 Упростите произведения, применяя разные формулы:

а) $(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2$;

б) $(x + 1)^3(x^2 - x + 1)^3$;

в) $(2m + n)^2(4m^2 + n^2 - 2mn)^2$;

г) $\left(\frac{4}{9}u - \frac{2}{11}v\right)^3\left(\frac{16}{81}u^2 + \frac{8}{99}uv + \frac{4}{121}v^2\right)^3$.

М

18 а) Запишите выражение $a^6 - b^6$, представив его как разность кубов, после чего выполните преобразования с помощью формул сокращённого умножения.

б) Запишите выражение $a^6 - b^6$, представив его как разность квадратов, после чего выполните преобразования с помощью формул сокращённого умножения.

в) Сравните полученные результаты и сделайте выводы.

19 Придумайте геометрическую иллюстрацию для формул суммы кубов и разности кубов.

3.6 Разложение многочлена на множители

Знакомимся с новой темой

Одно из чрезвычайно важных умений, которые нужно приобрести для успешного занятия алгеброй, – это умение раскладывать многочлен на множители. Вы уже научились решать определённое количество таких задач.

В данном параграфе мы вспомним уже известные вам приёмы разложения на множители и рассмотрим некоторые новые приёмы.

I. Разложение на множители с помощью вынесения за скобки общего множителя.

По-видимому, это самый простой приём разложения на множители. Мы уже обсуждали его в параграфе 2.5. Напомним, что за скобки в многочлене удобно выносить одночлен, буквенная часть которого состоит из букв, входящих во все члены этого многочлена, причём каждая из таких букв войдёт в выносимый за скобки одночлен с наименьшим показателем степени из всех встретившихся в многочлене показателей степеней этой буквы.

При этом коэффициент выносимого за скобки одночлена может быть любым действительным числом, отличным от нуля. Если все коэффициенты многочлена – целые числа, то в качестве коэффициента выносимого за скобки одночлена удобно брать наибольший общий делитель их модулей. Если же коэффициенты многочлена – обыкновенные дроби, то удобно сначала привести их к наименьшему общему знаменателю, после чего в качестве коэффициента выносимого за скобки одночлена взять дробь с этим знаменателем и числителем, равным наибольшему общему делителю модулей всех числителей.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Вынесем за скобки общий множитель в многочлене $10a^2c^3 - 15abc^2 + 75ab^2c^4$. Буква a входит во все члены этого многочлена, соответственно с показателями степеней 2; 1 и 1. Наименьшее из этих чисел 1, значит, в выносимый за скобку одночлен буква a войдёт в первой степени. Буква b входит не во все члены многочлена (не входит в первый член), значит, в выносимый за скобку одночлен буква b не войдёт. Буква c входит во все члены этого многочлена, соответственно с показателями степеней 3; 2 и 4. Наименьшее из этих чисел 2, значит, в выносимый за скобку одночлен буква c войдёт во второй степени. Таким образом, буквенная часть выносимого за скобку одночлена будет ac^2. Коэффициенты многочлена – целые числа 10; −15 и 75. Наибольший общий делитель их модулей равен 5. Итак, за скобку выносим одночлен $5ac^2$. При этом в скобках будет стоять многочлен, равный частному начального многочлена и вынесенного за скобки одночлена:

$$10a^2c^3 - 15abc^2 + 75ab^2c^4 = 5ac^2\,(2ac - 3b + 15b^2c^2).$$

2) $\dfrac{3}{35}x^3y^3 - \dfrac{15}{28}x^4y^2 + \dfrac{9}{14}x^5y^2 = \dfrac{12}{140}x^3y^3 - \dfrac{75}{140}x^4y^2 + \dfrac{90}{140}x^5y^2 =$

$= \dfrac{3}{140}x^3y^2\,(4y - 25x + 30x^2).$

II. Разложение на множители с помощью формул сокращённого умножения.

Вспомним изученные к настоящему моменту семь формул сокращённого умножения:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	квадрат суммы
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	квадрат разности
3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	куб суммы
4) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	куб разности
5) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	разность квадратов
6) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$	разность кубов
7) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$	сумма кубов

То, что последние три формулы дают разложение на множители соответственно выражений $a^2 - b^2$; $a^3 - b^3$ и $a^3 + b^3$, никаких сомнений не вызывает. Что касается первых четырёх формул, то всё становится абсолютно ясно, если записать их в виде:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ квадрат суммы

2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ квадрат разности

3) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ куб суммы

4) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$ куб разности

Теперь видно, что многочлены, стоящие в левых частях, преобразовываются в квадраты или кубы двучленов, т.е. раскладываются на множители.

Разложение на множители с применением формул сокращённого умножения вы неоднократно выполняли, решая задания из предыдущих параграфов этой главы. Более сложные ситуации с применением формул сокращённого умножения мы ещё рассмотрим позже.

III. Разложение на множители методом группировки.

Начнём с рассмотрения простого примера. Попробуем разложить на множители многочлен $ax + by + ay + bx$.

Одночлена, который можно было бы вынести за скобку, здесь нет. Никакая из формул сокращённого умножения неприменима (нет ни квадратов, ни кубов).

Попробуем разбить имеющиеся у нас четыре слагаемых на две группы по два слагаемых. Сделать это можно тремя способами (в одну группу с первым слагаемым может войти либо второе, либо третье, либо четвёртое). Мы аккуратно рассмотрим каждый из этих способов и посмотрим, что из этого получится.

1) Группируем первое слагаемое со вторым (и тем самым третье слагаемое автоматически группируется с четвёртым):

$$ax + by + ay + bx = (ax + by) + (ay + bx).$$

Никаких упрощающих преобразований с выражениями, стоящими ни в первой, ни во второй скобках, сделать не удаётся. Однако мы предприняли только первую попытку, и у нас в запасе есть ещё два других способа группировки. Помните: пока вы не перебрали все возможные способы группировки, останавливаться не надо!

2) Группируем первое слагаемое с третьим (и тем самым второе слагаемое автоматически группируется с четвёртым):

$$ax + by + ay + bx = (ax + ay) + (by + bx).$$

Здесь перед нами открываются определённые возможности. Мы можем вынести из первых скобок общий множитель a, а из вторых скобок – общий множитель b. Сделаем это:

$$(ax + ay) + (by + bx) = a(x + y) + b(y + x).$$

Но ведь $x + y = y + x$, значит:

$$(ax + ay) + (by + bx) = a(x + y) + b(y + x) = a(x + y) + b(x + y).$$

Таким образом, слагаемые образовавшейся суммы $a(x+y)+b(x+y)$ имеют общий множитель – стоящий в скобках двучлен $x+y$. Это даёт нам возможность вынести этот общий множитель за скобки («вынести скобки за скобки»!):

$$a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b).$$

Воспроизведём сделанную выкладку с начала до конца:

$$ax+by+ay+bx=(ax+ay)+(by+bx)=a(x+y)+b(y+x)=$$

$$=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b).$$

Таким образом, мы разложили многочлен $ax+by+ay+bx$ на множители.

3) Хотя на второй попытке цель достигнута и разложение на множители получено, рассмотрим ещё и третий из названных ранее возможных способов группировки. Группируем первое слагаемое с четвёртым (и тем самым второе слагаемое автоматически группируется с третьим):

$$ax+by+ay+bx=(ax+bx)+(by+ay).$$

Здесь мы можем вынести из первых скобок общий множитель x, а из вторых скобок – общий множитель y. Сделаем это и продолжим дальнейшие преобразования без комментариев, поскольку эти преобразования очень похожи на выполненные в предыдущем случае:

$$ax+by+ay+bx=(ax+bx)+(by+ay)=x(a+b)+y(b+a)=$$

$$=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y).$$

И здесь нам удалось разложить многочлен $ax+by+ay+bx$ на множители!

Таким образом, из трёх возможных способов группировки в данном примере два привели нас к успеху. Бывают ситуации менее благоприятные – когда к успеху приводит только один способ группировки (а бывает и так, что ни один!).

Мы рассмотрели решение простого примера очень подробно. На практике всё делается гораздо быстрее. Скажем, первый из предложенных способов группировки можно было вообще не рассматривать, т.к. сразу было понятно, что он ни к чему не приведёт. Вообще, когда мы группируем, то предполагается, что для включения слагаемых в одну группу должен быть какой-нибудь повод. Скажем, при втором из рассмотренных выше способов группировки поводом для включения в одну группу слагаемых ax и ay была возможность вынесения за скобки общего множителя a. При этом оказалось, что во второй образовавшейся группе тоже удаётся вынести за скобки общий множитель.

Часто поводом для включения слагаемых в одну группу является не возможность вынесения за скобки общего множителя, а возможность применения какой-нибудь формулы сокращённого умножения.

Попробуем разложить на множители многочлен x^2+2x-y^2+2y. Если мы сгруппируем первые два слагаемых между собой и последние два между собой, то поначалу в каждой группе удастся вынести за скобки общий множитель, на этом всё и остановится:

$$x^2 + 2x - y^2 + 2y = (x^2 + 2x) - (y^2 - 2y) = x(x + 2) - y(y - 2).$$

Попробуем сгруппировать между собой первое слагаемое с третьим. В результате эта группа будет представлять собой разность квадратов, а значит, может быть разложена на множители с помощью соответствующей формулы. Дальнейший ход событий будет таким:

$$x^2 + 2x - y^2 + 2y = (x^2 - y^2) + (2x + 2y) =$$
$$= (x - y)(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(x - y + 2).$$

Как видим, многочлен удалось разложить на множители.

Бывают ситуации, когда в многочлене, состоящем их четырёх одночленов, в одну группу разумно включить три члена, а в другую – только один. Скажем, в многочлене $m^2 - n^2 + k^2 - 2mk$ никакие группировки на две группы по два слагаемых не приведут к разложению на множители. Если же включить в одну группу первый, третий и четвёртый члены (поводом для такой группировки является тот факт, что они образуют развёрнутый вид формулы квадрата разности), то дальнейшее разложение на множители удастся:

$$m^2 - n^2 + k^2 - 2mk = (m^2 + k^2 - 2mk) - n^2 = (m - k)^2 - n^2 =$$
$$= (m - k - n)(m - k + n).$$

Стоит также упомянуть ситуацию, когда в предложенном для разложения на множители выражении уже содержится группировка, причём, на первый взгляд, весьма перспективная. Увы, часто бывает так, что эту группировку нужно разрушить и сгруппировать по-другому.

Скажем, попробуем для примера разложить на множители выражение $ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)$. Если приняться раскладывать по формуле разности квадратов стоящие в скобках выражения, то мы быстро окажемся в тупике. Раскроем скобки и сгруппируем по-своему! Дальнейшее понятно без комментариев:

$$ab\,(x^2 - y^2) + xy\,(a^2 - b^2) = abx^2 - aby^2 + a^2xy - b^2xy =$$
$$= (abx^2 + a^2xy) - (aby^2 + b^2xy) = ax\,(bx + ay) - by\,(ay + bx) =$$
$$= ax\,(bx + ay) - by\,(bx + ay) = (bx + ay)(ax - by).$$

Вы видите, что нахождение удачной группировки – занятие творческое, к тому же требующее известной настойчивости и изобретательности. К сожалению, во многих случаях это также занятие без гарантии успеха. Бывают ситуации, когда удачную группировку так и не удаётся найти.

IV. Разложение на множители методом группировки с предварительным образованием дополнительных слагаемых.

Начнём с рассмотрения простого примера. Попробуем разложить на множители многочлен $x^3 + x + 2$. Никакой из рассмотренных выше методов не приводит к успеху. Но если мы предварительно выполним простенькое преобразование: запишем вместо слагаемого 2 равное ему выражение 1+1, то удастся организовать группировку, применить формулу суммы кубов, а затем и вынесение за скобки:

$$x^3 + x + 2 = x^3 + x + 1 + 1 = (x^3 + 1) + (x + 1) =$$
$$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1 + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 2).$$

Рассмотрим ещё один пример. Разложим на множители многочлен $m^4 + m^2n^2 + n^4$. Уже при первом взгляде на него мелькает мысль: «Вот если бы там было удвоенное произведение m^2 и n^2...» Так давайте сделаем удвоенное! Для этого представим выражение m^2n^2 в виде разности $m^2n^2 = 2m^2n^2 - m^2n^2$, после чего нам удастся выполнить подходящую группировку и достичь цели:

$$m^4 + m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 - m^2n^2 + n^4 = (m^4 + 2m^2n^2 + n^4) - m^2n^2 =$$
$$= (m^2 + n^2)^2 - (mn)^2 = (m^2 + n^2 - mn)(m^2 + n^2 + mn).$$

Понятно, что рассматриваемый приём разложения на множители является искусственным, требующим определённого опыта и своеобразного «комбинационного зрения». Тем не менее стоит пытаться его осваивать, развивая в себе необходимые для этого качества.

V. Разложение на множители с помощью использования нескольких методов.

Разбирая примеры разложения на множители, рассмотренные в этом параграфе, вы, наверное, заметили, что только в самых простых из них применялся лишь один какой-то метод разложения на множители. В большинстве примеров использовалось несколько методов – на каждом шаге преобразований свой метод. Естественно, начинать следует с наиболее простых процедур, скажем, попытаться найти и вынести за скобки общий множитель или увидеть «в готовом виде» формулу сокращённого умножения. Затем, либо осуществив простую процедуру, либо убедившись, что это невозможно, нужно предпринимать более сложные шаги.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Разложим на множители многочлен $3x^5 - 24x^2$. Сначала вынесем за скобки общий множитель $3x^2$, получим:

$$3x^5 - 24x^2 = 3x^2(x^3 - 8).$$

Теперь заметим, что выражение в скобках представляет собой разность кубов, и закончим разложение:

$$3x^5 - 24x^2 = 3x^2(x^3 - 8) = 3x^2(x^3 - 2^3) = 3x^2(x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

2) Разложим на множители многочлен $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$. Заметим, что первый и последний члены являются кубами. Это даёт повод сгруппировать их

между собой и воспользоваться соответствующей формулой сокращённого умножения. Второй и третий члены автоматически тоже окажутся сгруппированными, и мы вынесем в этой второй группе за скобки общий множитель:

$$8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (8x^3 + 27) + (36x^2 + 54x) = ((2x)^3 + 3^3) + 18x\,(2x + 3) =$$
$$= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) + 18x\,(2x + 3).$$

Далее возникает возможность вынести за скобки общий множитель $(2x + 3)$, что мы и сделаем:

$$(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) + 18x\,(2x + 3) = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9 + 18x) =$$
$$= (2x + 3)(4x^2 + 12x + 9).$$

Теперь замечаем, что вторая скобка является квадратом суммы:

$$(2x + 3)(4x^2 + 12x + 9) = (2x + 3)(2x + 3)^2 = (2x + 3)^3.$$

Решение этого примера показывает, что если мы не увидели в нашем начальном многочлене развёрнутый вид куба двучлена $2x + 3$ (а надо сказать, что такие вещи мало кто видит сразу), то всё равно мы сможем, постепенно раскладывая этот многочлен на множители, прийти к представлению нашего многочлена в виде куба двучлена $2x + 3$.

3) Некоторые многочлены второй степени удаётся разложить на множители после выделения в них полного квадрата. Возьмём, к примеру, многочлен $x^2 + 12x + 20$, выделим в нём полный квадрат и посмотрим, что можно будет сделать дальше:

$$x^2 + 12x + 20 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 - 6^2 + 20 = (x + 6)^2 - 16.$$

Мы видим, что полученное выражение является разностью квадратов, а значит, может быть разложено на множители:

$$(x + 6)^2 - 16 = (x + 6)^2 - 4^2 = (x + 6 - 4)(x + 6 + 4) = (x + 2)(x + 10).$$

В заключение параграфа отметим, что не всякий многочлен можно разложить на множители, степень которых больше нулевой. Например, этого нельзя сделать с многочленами $x^2 + 2x + 10$, $m^2 + n^2$, $ab + 1$ и многими другими. К задаче разложения многочлена на множители мы ещё вернёмся в будущем.

Развиваем умения

Н

1 Вынесите за скобки общий множитель:

а) $8abc - 6bcd + 4acd$;

б) $5xyz + 7zxt + 9xrz$;

в) $3f^2g + 6f - 18fg$;

г) $-11ijk + 22il + 33ij$;

д) $11sdt - 13dtq - 2atd$;
е) $-nm^2 - 2m + 3nmg$;
ж) $-2fghk + 5kdfs - 17hfkm$;
з) $-7wer - 21erw - 14erw$.

2 Вынесите за скобки общий множитель:

а) $2a^2bc^2 - 3a^3b^2c + 6a^3b^3$;
б) $8x^2y^4z^2 + 4t^3xz^3 + 8x^2mn^3$;
в) $9f^4g^2h + 18f^2g^2h - 15fg^2h$;
г) $-44i^3j^2k^3 + 4i^2j^3k^2 + 20i^2j^2k^2$;
д) $7s^2my^2 - 8s^2my^4 - 9smf^3$;
е) $-25n^5m^4 - 5m^4n^3 + 30m^2d^2n^3$;
ж) $-22f^3g^2h^2k + 2k^3df^2s - 11hf^3k^4m$;
з) $-20w^4e^2r - 10e^2r^2w^5 - 15e^3rw^4$.

3 Разложите на множители, применяя формулы сокращённого умножения:

а) $9a^2 - m^2$;
б) $1 + 6h + 12h^2 + 8h^3$;
в) $x^2 + 4xy + 4y^2$;
г) $27s^3 - 8d^3$;
д) $p^3 + 8q^3$;
е) $16d^2 - 24ds + 9s^2$;
ж) $m^3 - 9m^2 + 27m - 27$;
з) $25a^2c + 30abc + 9b^2c$.

4 Разложите на множители, применяя формулы сокращённого умножения:

а) $(3x + 5)^2 - (2x - 5)^2$;
б) $(5g - 2)^3 + g^3$;
в) $(a + b)^2 + 2(a^2 - b^2) + (a - b)^2$;
г) $(2h + 1)^3 - h^3$;
д) $(7c - 2)^2 - (5c + 3)^2$;
е) $27h^3 + 27h^2j^2 + 9hj^4 + j^6$;
ж) $8m^3 - 12m^2n + 6mn^2 - n^3$;
з) $25l^8 - 30l^4n^4 + 9n^8$.

5 Разложите на множители, применяя группировку слагаемых:

а) $n^2 - m^2 + 3n - 3m$;
б) $4s^2 + 10s - 5y - y^2$;
в) $x^2 + 4x^2y + 4y^2 + y$;
г) $2r - 1 - t + 2rt$;
д) $2x - 1 - y + 2xy$;
е) $1 + 3g + 2j + 3gj + j^2$;
ж) $8f^3 - 1 + 4f^2 + 2f + 1$;
з) $2 + 4i + 2i^2 + 2j + 2ij$.

6 Разложите на множители, применяя группировку слагаемых:

а) $4ab + 9ac + 6bc + 6a^2$;
б) $20x^2 - 4xy + 30xz - 6yz$;
в) $(7h - 3)^3 + 5h - 3 - 8h^3$;
г) $(2a + 1)^3 - a^3 + a + 1$;
д) $3f^2g - fg^2 - 6f^2j + 2fgj$;
е) $a^3 + ab^2 - a^2c - b^2c + ac^2 - c^3$;
ж) $ij + i^2j^2 + k + 2ijk + k^2$;
з) $m^3n - 2m^2n^2 + mn^3 - m^2ns + mn^3s$.

7 Разложите на множители, применяя разные методы:

а) $5mn^4 - 30mn^2 + 45m$;
б) $5s + 8s^3 + 3s^5$;
в) $4a + ab^2 - a^2b - 4b$;
г) $8f^2g^2 - 2fghj - 15h^2j^2$;

д) $(x+y)^2-4xy$;

е) $3f+6g-f^2g-2fg^2$;

ж) $84xy+(7d-3s)^2$;

з) $3f^4g^5+3f^4g^6-15f^{10}g^4$.

Н

8 Разложите на множители, применяя разные методы:

а) $x^2y-xy^2-xz+xy+yz-z$;

б) $x(x-1)-y(y-1)$;

в) $2a^2b+2b^2-ab^2-ab-6b$;

г) $g^2(g^2+1)-h^2(h^2+1)$;

д) $2c^3d^2-3c^2d^3-2cg^2+3dg^2$;

е) $x^4y-4x^3y^2+x^2y^3+6xy^4$;

ж) $4a^4x-5a^2z^3+x^5$;

з) $a^2-b^2+c^2-d^2+e^2+2(ac-bd+ae+ce)$.

9 Разложите на множители:

а) $x^2+y+x-y^2$;

б) $a+a^2-b-b^2$;

в) $m^3-n^3+2m-2n$;

г) $8s^3-d^3+14s-7d$;

д) $12r-49t^2+36r^2-14t$;

е) $36d+64d^3+27s+27s^3$;

ж) $f^2+3gw+fw-9g^2$;

з) $125k^9-20k^3+27v^{12}-12v^4$.

10 Представьте в виде произведения:

а) $(x^2+8y)^2-(x+2y)^2$;

б) $(r+s+t)^3+(r+s-t)^3$;

в) $(z+Z)^2-(Z-z)^2$;

г) $(x+2y)^3-(x-y)^3$;

д) $(4m-9n)^2-(3m+2n)^2$;

е) $(13t+15h)^3-(12t+14h)^3$;

ж) $(aX+bY)^2-(cX+dY)^2$;

з) $(3f+2g)^3+(4f+3g)^3$.

11 Разложите на множители:

а) $x^2+2xy+y^2-z^2$;

б) $a^3-1-b^3+3ab^2-3a^2b$;

в) x^2-y^2+4x+4;

г) x^2-y^2-4y-4;

д) $4-w^2-2gw-4h+h^2-g^2$;

е) $a^4-4a^4b^4+b^4-2a^2b^2$;

ж) $9+18c+9c^2-25d^2$;

з) $25x^2+10x^2y-49y^2+x^2y^2$.

12 Разложите на множители:

а) $x^4-5x^3-10x^2+50x$;

б) $9y-9y^2+y^4-y^3$;

в) $4z^6-9z^4-9z^3+4z^5$;

г) $2h^8-32h^6+48h^5-3h^7$;

д) $m^6 - 1 + m^2 - m^4 + m - m^5$;

е) $n^6 + n^5 + n^4 + 2n^3 + n^2 + n + 1$;

ж) $mn^4 - mn + mn^2 - mn^3$;

з) $9r^3s^4 + 6r^{12}s^4 - 6r^3s^2 - 4r^{12}s^2$.

П

13 Разложите на множители:

а) $(x+y)^3 - (x-y)^3 - 8y^3$;

б) $(8l^3 - 3s^3)^3 + (8l^3 + 3s^3)^3$;

в) $(x-1)^6 + (x-1)^4 - 1 + 2x^2 - x^4 + (x+1)^4 + (x+1)^6$;

г) $g^3h^2 + g^2h^3 + g^2h^2k - gk^2 - hk^2 - k^3$;

д) $(m^2 - n^2)^3 + 4m^2n^2(m^2 - n^2)$;

е) $6r^9 - 9r^7 - 6r^6 - 4r^5 + 9r^4 + 6r^3 + 4r^2 - 6$;

ж) $1 - 2x^3 + (x-1)^3 + (x-1)^3(x^2 + x) + x^6$;

з) $\left(\dfrac{a}{2} + b\right)^3 - a^3 + \left(\dfrac{a}{2} - b\right)^3$.

14 Разложите на множители:

а) $x^2 + 10x + 24$;

б) $35 + 2z^2 - 17z$;

в) $6y^2 - 18 + 12y$;

г) $49h^2 + 35h + 6$;

д) $x^4 + 4x^2 - 5$;

е) $f^9 - f^6h^3 - f^3h^6 + h^9$;

ж) $1 - 17i^4 + 16i^8$;

з) $4k^2y^2 - 16k^2 - 16y^2 + 4k^4 - 32ky + 8k^3y$.

15 Докажите, что $n^3 - n$ делится на 6 при любом натуральном $n > 1$.

16 а) Докажите, что $n^5 - n$ делится на 5 при любом натуральном $n > 1$.

б) Верно ли, что $n^5 - n$ делится на 15 при любом натуральном $n > 1$?

в) Верно ли, что $n^5 - n$ делится на 30 при любом натуральном $n > 1$?

М

17 Разложите на множители:

а) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$;

б) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$.

18 Разложите на множители:

а) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;

б) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

3.7 Понятие о тождествах и методах их доказательства

Знакомимся с новой темой

Целым алгебраическим выражением называется такое алгебраическое выражение, которое содержит только операции сложения, вычитания и умножения (при этом произведение нескольких одинаковых сомножителей может быть записано в виде степени с натуральным показателем), а действие деления либо отсутствует вообще, либо является делением на действительное число, отличное от нуля.

Можно сказать короче: в целом алгебраическом выражении нет деления на буквенное выражение.

Например, целыми алгебраическими выражениями (или, для краткости, просто *целыми выражениями*) являются:

$$4x(x-2y);\ \frac{5a-8}{7};\ 7m^3-5mn^2+m-5;\ 3ab(b+c)-(a^2-abc).$$

Приведём также несколько примеров алгебраических выражений, не являющихся целыми:

$$\frac{m+2}{m-2};\ 3ab-5:(b-2c+4);\ x^2-3x+5+\frac{1}{x};\ \frac{2y}{9}-\frac{9}{2y}.$$

Такие алгебраические выражения называются дробными алгебраическими выражениями. Вы подробно изучите их на уроках алгебры в 8-м классе.

Целое выражение может быть преобразовано в многочлен стандартного вида.

Выполним такое преобразование для первого, второго и четвёртого из перечисленных выше целых алгебраических выражений (третье выражение уже является многочленом стандартного вида).

$$4x(x-2y)=4x^2-8xy;$$

$$\frac{5a-8}{7}=\frac{1}{7}(5a-8)=\frac{5}{7}a-\frac{8}{7};$$

$$3ab(b+c)-(a^2-abc)=3ab^2+3abc-a^2+abc=3ab^2+4abc-a^2.$$

Заметим, что целое алгебраическое выражение имеет смысл при всех значениях входящих в него букв, ведь если в нём и содержится некоторое количество действий деления, то каждый раз это деление на ненулевое действительное число.

Равенство между двумя целыми алгебраическими выражениями называется *тождеством*, если оно верно при всех значениях входящих в него букв. Верное числовое равенство тоже называют тождеством.

Два алгебраических выражения называются *тождественно равными*, если равны их числовые значения при всех значениях входящих в них букв.

На уроках алгебры в 8-м и 9-м классах вы встретитесь с тождествами, содержащими другие алгебраические выражения — не только целые. Для таких выражений понятие тождества будет уточнено.

К настоящему моменту вы уже знакомы с большим количеством тождеств.

Тождествами являются законы арифметических операций:

$a + b = b + a$	переместительное свойство сложения;
$(a + b) + c = a + (b + c)$	сочетательное свойство сложения;
$a \cdot b = b \cdot a$	переместительное свойство умножения;
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	сочетательное свойство умножения;
$(a + b) \cdot c = ac + bc$	распределительное свойство умножения относительно сложения.

Тождествами являются правила действий со степенями:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

$a^m \cdot b^m = (ab)^m$;

$(a^m)^n = a^{mn}$

(мы выписали только те из них, которые содержат целые выражения).

Тождествами являются формулы сокращённого умножения:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	квадрат суммы;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	квадрат разности;
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	куб суммы;
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	куб разности;
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	разность квадратов;
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	разность кубов;
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	сумма кубов.

Если выписана цепочка равенств между целыми алгебраическими выражениями, в которой каждое следующее выражение тождественно равно предыдущему, то говорят, что выполнено *тождественное преобразование* начального выражения в конечное. В результате начальное выражение тождественно равно конечному выражению.

Тождественные преобразования алгебраических выражений относятся к основополагающим умениям алгебры.

Выполняются тождественные преобразования с помощью перечисленных выше законов арифметических действий, правил работы со степенями, формул сокращённого умножения, а также ряда других известных вам правил – правила раскрытия скобок и правила заключения в скобки, правил действий с одночленами и многочленами и т.д.

При доказательстве тождеств можно поступать по-разному.

Если одна часть тождества заметно более громоздкая, чем другая, то можно выполнять тождественные преобразования более громоздкой части, пока не получится менее громоздкая.

Например, докажем тождество:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy.$$

Здесь левая часть более громоздкая, чем правая, потому начнём преобразовывать её. Это можно делать по-разному. Применим, например, формулы квадрата суммы и квадрата разности:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)=$$
$$=x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2=4xy.$$

В результате тождественных преобразований левой части получили правую часть. Тождество доказано.

Можно было доказать тождество по-другому, применив формулу разности квадратов:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=\big((x+y)+(x-y)\big)\cdot\big((x+y)-(x-y)\big)=$$
$$=(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x\cdot 2y=4xy.$$

Если обе части доказываемого тождества мало отличаются друг от друга с точки зрения громоздкости, то можно начать выполнять тождественные преобразования одной из частей и делать это, пока возможно. В результате мы остановимся на некотором выражении (тождественно равном той части, которую преобразовывали). После этого можно выполнять тождественные преобразования другой части доказываемого тождества, пока это удаётся. В результате мы тоже остановимся на некотором выражении (тождественно равном этой другой части). Если выражения, на которых мы остановились, одинаковы, то тождество доказано, поскольку два выражения, тождественно равные третьему, тождественно равны между собой.

Докажем тождество:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2.$$

Преобразуем сначала левую часть, выполнив умножение двучленов:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2.$$

Теперь преобразуем правую часть, применив сначала формулы квадрата суммы и квадрата разности, затем приведя подобные и, наконец, переставив местами слагаемые в полученной сумме:

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=a^2x^2+2axby+b^2y^2+a^2y^2-2aybx+b^2x^2=$$
$$=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2.$$

В результате и левая, и правая части доказываемого тождества оказались тождественно равны одному и тому же выражению. Тождество доказано.

Заметим, кстати, что последнее тождество называется тождеством Диофанта*. Одно из его возможных применений – доказательство утверждения:

Если каждое из двух натуральных чисел можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, то произведение этих чисел тоже обладает таким же свойством.

Наконец, ещё один подход к доказательству тождеств заключается в том, чтобы составить разность левой и правой частей тождества и выполнять её тождественные преобразования до тех пор, пока не получится нуль.

Докажем таким образом тождество:

$$ab(x - y) - xy(a - b) = ax(b - y) - by(a - x).$$

Составим разность правой и левой частей, после чего раскроем скобки и приведём подобные (перемножая одночлены, мы будем сразу записывать буквы в алфавитном порядке):

$ab(x - y) - xy(a - b) - ax(b - y) + by(a - x) =$
$= abx - aby - axy + bxy - abx + axy + aby - bxy = 0.$

(В образовавшейся алгебраической сумме противоположными одночленами являются первый и пятый, второй и седьмой, третий и шестой, четвёртый и восьмой, поэтому эта алгебраическая сумма равна нулю.)

Тождество доказано.

В заключение параграфа поговорим ещё об одном виде задач, примыкающем к задачам на доказательство тождеств. Рассмотрим пример.

Докажите, что если $x^2y + xy^2 = 1$, то $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3$.

Обратите внимание: здесь нужно доказать выполнение равенства $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3$ не для всех значений переменных x и y, а лишь для таких, которые удовлетворяют определённому *условию*, в нашем случае $x^2y + xy^2 = 1$. Именно поэтому такие задачи принято называть задачами на *тождества с дополнительными условиями*.

Задачи на тождества с условиями можно записывать единообразно в виде, как мы сделаем для рассматриваемой задачи.

Дано: $x^2y + xy^2 = 1$.
Доказать: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3$.

Полезно воспользоваться уже известным вам приёмом: два выражения равны в том и только в том случае, если их разность равна нулю. Это позволит переписать задачу так:

Дано: $x^2y + xy^2 - 1 = 0$.
Доказать: $(x + y)^3 - x^3 - y^3 - 3 = 0$.

Начнём выполнять тождественные преобразования левой части:

$(x + y)^3 - x^3 - y^3 - 3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 - y^3 - 3 =$
$= 3x^2y + 3xy^2 - 3 = 3(x^2y + xy^2 - 1).$

* О Диофанте говорится далее, на с. 138.

Мы доказали, что при всех значениях переменных x и y

$$(x+y)^3 - x^3 - y^3 - 3 = 3(x^2y + xy^2 - 1).$$

Мы доказали тождество («обыкновенное», без всяких условий). Лишь теперь воспользуемся условием $x^2y + xy^2 - 1 = 0$. Это позволит заключить, что $(x+y)^3 - x^3 - y^3 - 3 = 3(x^2y + xy^2 - 1) = 0$, поскольку последняя скобка равна нулю.

Доказательство закончено.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложения.

а) В целом алгебраическом выражении нет деления на ...

б) Любое целое алгебраическое выражение может быть преобразовано в ...

2 Укажите, какие из выражений являются целыми, и объясните почему:

а) $(n+6):3$;

б) $3:(n+6)$;

в) $x + \dfrac{1}{x}$;

г) $\dfrac{s}{2}\left(\dfrac{d}{3} \cdot q + w\right) + u$;

д) $\dfrac{z+1}{z+1}$;

е) $(1 - 2t + t^2)^2$;

ж) $(h+y):(23 - 0{,}345)$;

з) $2:(2:p)$.

3 Укажите, какие из выражений не являются целыми, и объясните почему.

а) $\dfrac{2m-3}{3}$;

б) $\dfrac{1}{y+x}$;

в) $t^3 + (x^3yz + y^3):2$;

г) $(6x - 7y):(6x - 7y)$;

д) $\dfrac{2m-3}{2m}$;

е) $k^3h(j^5 + j^3 + j)$;

ж) $(x-1):x \cdot x$;

з) $\left(\dfrac{w}{2} - \dfrac{W}{3}\right)\left(\dfrac{w}{2} + \dfrac{W}{3}\right)$.

4 Преобразуйте целое выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(a+2)^2 - 2(2a-1)$;

б) $(x-y)^2 + (x+y)^2$;

в) $(X+Y)^2 - (X-Y)^2$;

г) $(X+Y)^3 - (X-Y)^3$;

д) $(2u + 3v)^3 - 8u^3 - 27v^3$;

е) $(3f + 4g)^3 - (3f - 4g)^3$;

ж) $(S + 3s)^3 + (3s - S)^3$;

з) $A^3 + (4a - A)^3 - 64a^3$.

5 Упростите выражение:

а) $(2p - 3q)^2 + 12pg$;

б) $(7s + 3t)^2 - 42ts$;

в) $(a + b)^3 - 2a^2b - 2ab^2$;

г) $(a - b)^3 + 3a^2b - 3ab^2$;

д) $(f - g)^3 - f(f - g)^2$;

е) $u^3 + v^3 - (u + v)^3$;

ж) $(x + y + z)^2 - (x + y - z)^2$;

з) $(x + y + z)^3 + (x + y - z)^3 - 2(x + y)^3$.

6 Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $(4 + c)^2 - (2 - c) \cdot (8 - c)$;

б) $(2 - z)^2 + (z - 1) \cdot (z + 5)$;

в) $(u + v)^3 - (u^2 - v^2)(u + v)$;

г) $(i - j)^3 + (i - j)^2(i + j)$;

д) $(t - 2)(t - 1)\, t\, (t + 1)(t + 2)$;

е) $(4y - 5)(7x - 4) + (7x + 4)(4y + 5)$;

ж) $(x^4 + y^4)^3 - (x^6 + y^6)^2$;

з) $(x^4 + y^4)^2 - (x^2 - y^2)^4$.

Н

7 Упростите выражение:

а) $(2x + y)(3x - 2y) - (3x + 2y)(2x - y) + 8x\,(y - 1)$;

б) $(7s - d)(2u + 3) - (2s - 3)(7u - 1) - u\,(21 - 2d)$;

в) $(11g - 2f)(2f + g) + (11g + 2f)(2f - g) - 40fg$;

г) $\frac{1}{264}(12a + 11b)(11a + 12b) + \frac{1}{264}(12a - 11b)(11a - 12b)$;

д) $(7i - 3j)(5i + 2j) - (4i - 7j)(2i - 3j) - 25ij$;

е) $(f + g - h)(f + g + h) - (f - g + h)(-f + g + h)$;

ж) $(rs + st)(rt + st) + (r^2 - rt)(t^2 - st) - rt\,(s^2 - t^2)$;

з) $(x - 1)(x - 2)\,x + x\,(x + 1)(x + 2) - 2x\,(x^2 - 2)$.

8 Установите, какие из равенств не являются тождествами, и объясните почему:

а) $(m + 5)^2 = m^2 + 25$;

б) $(7s + 6y)^2 = 49s^2 - 82sy + 34y^2$;

в) $(a+3b)^3 - 9a^2b - 30b^3 = (a-3b)^3 + 9a^2b + 24b^3$;

г) $10 = 1 + 9$;

д) $a^2 - b^2 = (a^2 - b^2)^2 - a^4 - b^4$;

е) $(2y-1)^3 + 2 = (2y+1)^3 - 24y^2$;

ж) $7 \cdot 8 = \dfrac{40\,320}{720}$;

з) $(a+b)^3 = (a-b)^3$.

9 Докажите тождество:

а) $(a-2b)^2 + 4b\,(a-b) = a^2$;

б) $(3y-2x)^2 + 12xy = 4x^2 + 9y^2$;

в) $(5u+v)^3 + (5u-v)^3 = 250u^3 + 30uv^2$;

г) $(1+w)^3 - (1+w)^2 - 2w^2 - w = w^3$;

д) $(f+g)^2 - (f-g)^4 = 8f^3g + 8fg^3$;

е) $(9x+8y)^2 - (9x-8y)^3 = 288xy$;

ж) $r^9 - t^9 + (t^3 - r^3)^3 = 3r^6t^3 - 3r^3t^6$;

з) $(kl-l)^2 + (l+kl)^2 - 2l^2 = 2k^2l^2$.

П

10 Докажите тождество:

а) $(4x+3y)(3x-y) - (6x+y)(2x-3y) = 21xy$;

б) $(5h+2j)(7h+3j) + (3h-5j)(2h+4j) - 31hj = 41h^2 - 14j^2$;

в) $(a+b+c)(b+c) - (a+b+c)(a+c) - c\,(b-a) = b^2 - a^2$;

г) $(m+n+p+q)(m+n) + (p-q-m-n)(p+q) - 2mn + q^2 = m^2 + n^2 + p^2$;

д) $(2f+g-3h)(f^2+g) - (f^2+4h+g)(g-3h) + 4gh - 2fg = 2f^3 + 12h^2$;

е) $(4t^4 - 2u^5)(2t^4 + 5u^5) + (3t^4 - 2u^5)(6t^4 + 7u^5) - t^8 + 24u^{10} = 25t^4(t^4 + u^5)$;

ж) $(hj+u)(h-ju) - (u-hj)(h-ju) - h^2j + ju^2 = h^2j - ju^2$;

з) $(a+b)^3 + (a+b)^2 + (a+b) + 1 = (1+a+b)(1+a^2+2ab+b^2)$.

11 Докажите тождество:

а) $(x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy\,(x+y)$;

б) $(x+y)^4 + x^4 + y^4 = 2\,(x^2+xy+y^2)^2$;

в) $(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9) = x^{10} - 1$;

г) $(a+b)(b+c)(a-c) = ab\,(a+b) - bc\,(b+c) + ac\,(a-c)$.

12 Докажите, что если $a^2 + b^2 = 2ab$, то $a = b$.

13 Докажите, что если $x + y = xy$, то $x(x + y^2) = y(y + x^2)$.

М

14 Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

15 Докажите, что если $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = 0$, то среди чисел a, b, c обязательно имеются по крайней мере два равных.

16 Докажите тождество:

а) $x^9 - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2)(1 + x^3 + x^6)$;

б) $(x - 6)^2 + (x - 5)^2 + (x - 3)^2 + x^2 + (x + 1)^2 + (x + 4)^2 + (x + 6)^2 + (x + 7)^2 =$
$= (x - 7)^2 + (x - 4)^2 + (x - 2)^2 + (x - 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 + (x + 5)^2 + (x + 8)^2$;

в) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 =$
$= (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2$;

г) $(6t^2 - 4tl + 4l^2)^3 = (3t^2 + 5tl - 5l^2)^3 + (4t^2 - 4tl + 6l^2)^3 + (5t^2 - 5tl - 3l^2)^3$.

Исследовательский проект «Симметричные многочлены от двух переменных».

Многочлен от двух переменных называется *симметричным*, если при замене их одной на другую он не меняется.

Например, если в многочлене $a^2b + 3ab + ab^2$ поменять a и b местами, то получим $b^2a + 3ba + ba^2$ – тот же многочлен (хоть и записанный по-другому). Значит, многочлен $a^2b + 3ab + ab^2$ – симметричный.

Докажите, что любой симметричный многочлен от переменных a и b можно записать в виде многочлена от новых переменных $u = a + b$ и $v = ab$.

Например, для рассмотренного выше многочлена:

$a^2b + 3ab + ab^2 = ab(a + 3 + b) = v(u + 3) = uv + 3v$.

Жизненная задача.

СИТУАЦИЯ. Проектирование участка наибольшей площади.

ВАША РОЛЬ. Архитектор-проектировщик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Требуется огородить забором с трёх сторон прямоугольный участок, примыкающий одной стороной к прямолинейному берегу реки. В вашем распоряжении имеется 100 м забора.

ЗАДАНИЕ.

Выберите размеры участка таким образом, чтобы его площадь была наибольшей.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

4.1 Уравнение с одним неизвестным и его корни

Вспоминаем то, что знаем

- Что называется уравнением?
- Что называется корнем уравнения?
- Что значит решить уравнение?
- Как найти неизвестное слагаемое?
- Как найти неизвестное уменьшаемое?
- Как найти неизвестное вычитаемое?
- Как найти неизвестный множитель?
- Как найти неизвестное делимое?
- Как найти неизвестный делитель?

Знакомимся с новой темой

Уравнением с одним неизвестным называют равенство, которое содержит неизвестное число, обычно обозначенное одной из букв латинского алфавита.

Пример 1. Уравнение с одним неизвестным: $7 + 2x = 5 + x$.

Если в уравнение вместо буквы (неизвестного) подставить какое-нибудь число, то после преобразований получится числовое равенство; при одних значениях неизвестного оно может быть верным, при других – неверным.

Например, если в уравнение $7 + 2x = 5 + x$ подставить $x = 1$, то получится неверное числовое равенство $9 = 6$, а если подставить $x = -2$, то получится верное числовое равенство $3 = 3$.

Корнем уравнения с одним неизвестным называется число (значение неизвестного), при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

Уравнение, как и тождество, представляет собой равенство между двумя алгебраическими выражениями, но задача для него ставится другая: требуется выяснить, при каких значениях букв равенство верно.

Решить уравнение означает найти все его корни (или убедиться, что уравнение корней не имеет).

Из начальной школы нам известен приём решения уравнений, основанный на использовании взаимосвязи между компонентами арифметических действий. Мы знаем, как искать неизвестные слагаемое, множитель, неизвестные уменьшаемое, вычитаемое, делимое, делитель.

Пример 2. Решим уравнение: $(2x + 5) \cdot 3 - 8 = 25$.

Найдём неизвестное уменьшаемое $(2x + 5) \cdot 3$. Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, прибавим к разности (равной 25) вычитаемое (равное 8):

$(2x + 5) \cdot 3 = 25 + 8$;
$(2x + 5) \cdot 3 = 33$.

Найдём неизвестный множитель $2x + 5$. Чтобы найти неизвестный множитель, разделим произведение (равное 33) на известный множитель (равный 3):

$2x + 5 = 33 : 3;$
$2x + 5 = 11.$

Найдём неизвестное слагаемое $2x$. Чтобы найти неизвестное слагаемое, вычтем из суммы (равной 11) известное слагаемое (равное 5):

$2x = 11 - 5;$
$2x = 6.$

И наконец, найдём неизвестный множитель x:

$x = 6 : 2;$
$x = 3.$

Другой полезный приём – предварительно преобразовать алгебраические выражения в левой (или правой) части уравнения.

Пример 3. Решим уравнение: $8x - 5\ (2x - 1) = 19.$
Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$8x - 10x + 5 = 19;$
$5 - 2x = 19.$

Лишь после этого найдём неизвестное вычитаемое:

$2x = 5 - 19;$
$2x = -14.$

И наконец, найдём неизвестный множитель x:

$x = -14 : 2;$
$x = -7.$

Решая уравнения, можно проводить тождественные преобразования: раскрывать скобки и приводить подобные слагаемые.

Развиваем умения

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Что называется корнем уравнения с одним неизвестным?

б) Что значит решить уравнение с одним неизвестным?

2 Выберите уравнения, для которых число −3 является корнем:

а) $x + 5 = 2x + 9$;
б) $(2x + 3)(2x - 6) = 0$;
в) $\frac{x + 5}{x + 5} = 1$;
г) $x^2 + 3x = 0$;
д) $2x + 3 = x + (x + 3)$;
е) $(2x - 3)(2x + 6) = 0$;
ж) $\frac{x + 3}{x + 3} = 1$;
з) $x^2 + 4x + 3 = 0$.

3 Решите уравнение:

а) $2x - 15 = 28$;
б) $4x + 50 = 28$;
в) $10 - 7x = 3$;
г) $-56 - 3x = 25$;
д) $7x + 9 = 2{,}7$;
е) $5x - 5{,}3 = 11{,}2$;
ж) $10 + 3x = 6$;
з) $-2{,}5 + 6x = 50$.

Н

4 Решите уравнение:.

а) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$;
б) $2 - \frac{5}{x} = 10$;
в) $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$;
г) $2 - \frac{5}{x} = 10$;
д) $\frac{x}{4} + \frac{1}{3} = -1$;
е) $\frac{2}{5} + \frac{9}{x} = 4$;
ж) $\frac{x}{4} - \frac{1}{3} = -1$;
з) $\frac{2}{5} - \frac{9}{x} = 4$.

5 Решите уравнение:

а) $5x - (3x - 5) = 7$;
б) $(5x - 6) - 8x = 18$;
в) $7x - (5x - 4) = 11$;
г) $(3x - 4) - 8x = 16$;
д) $4(x - 5) - (7x + 4) = 6$;
е) $(3x - 1) - 3(2 - x) = 11$;
ж) $5(3 - 2x) - (2 - x) = -8$;
з) $(4x - 1) - 6(2x + 2) = 25$.

П

6 Решите уравнение:

а) $((2x + 15) - 41) \cdot 4 = 44$;
б) $((2x + 15) + 61) : 4 = 19$;
в) $\left(\frac{x - 5}{2} + 8\right) : 3 = 11$;
г) $\left(\frac{x - 5}{2} - 8\right) \cdot 3 = 39$;

д) $((2x - 7) + 2{,}3) : 0{,}5 = 19$;

е) $((2x + 7) + 2{,}3) \cdot 0{,}5 = 19$;

ж) $\left(\dfrac{x + 2}{2} - 3\right) \cdot 4 = 2{,}2$;

з) $\left(\dfrac{x + 2}{2} + 3\right) : 5 = 1{,}7$.

7 При каких значениях x значение выражения $5x - 4{,}4$ на 5 больше, чем значение выражения $7x - 3{,}6$?

М

8 Найдите все натуральные значения p, при которых корнем уравнения x является целое число:

а) $px = 8$; б) $px + 10 = 16$; в) $5px = 16$; г) $5px + 6 = 16$.

9 Может ли данное уравнение иметь отрицательный корень:

а) $x^3 + x = 9$;

б) $x|x| = 32$;

в) $x^4 - x + 6 = 0$;

г) $|x| = x^3$?

10 Может ли данное уравнение иметь целый корень:

а) $2(4 + x) = 9$;

б) $(2x + 4)(x + 3) = 7$;

в) $x(x + 1) = 6$;

г) $x^2 + x = 17$?

4.2 Линейные уравнения с одним неизвестным

Знакомимся с новой темой

Линейным уравнением с одним неизвестным называют уравнение, левая часть которого представляет собой многочлен первой степени с одним неизвестным, а правая часть равна нулю. Такие уравнения ещё называют *уравнениями первой степени с одним неизвестным*.

Общий вид линейного уравнения с одним неизвестным: $ax + b = 0$.

Здесь a и b – некоторые числа, которые называются коэффициентами уравнения. Поскольку степень многочлена, стоящего в левой части уравнения, – первая, то значение a не равно нулю.

В таблице представлены примеры линейных уравнений с одним неизвестным.

Уравнение	Коэффициенты
$3x + 6 = 0$	$a = 3$, $b = 6$
$-x + 1 = 0$	$a = -1$, $b = 1$
$7x = 0$	$a = 7$, $b = 0$
$2x - 4 = 0$	$a = 2$, $b = -4$

Линейные уравнения можно решать, используя взаимосвязи между компонентами действий.

Пример. Решим уравнение: $3x + 6 = 0$.

Найдём неизвестное слагаемое $3x$. Чтобы найти неизвестное слагаемое, вычтем из суммы (равной 0) известное слагаемое (равное 6):

$3x = 0 - 6$;

$3x = -6$.

Найдём неизвестный множитель. Чтобы найти неизвестный множитель, разделим произведение (равное –6) на известный множитель (равный 3):

$x = -6 : 3$;

$x = -2$.

Решим линейное уравнение в общем виде:

$ax + b = 0$;

$ax = -b$;

$x = -\frac{b}{a}$.

Можно сделать вывод, что линейное уравнение с одним неизвестным имеет единственный корень. То есть:

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax + b = 0$ имеет единственный корень $x = -\frac{b}{a}$.

Обратите внимание: не всякое уравнение вида $ax + b = 0$ является линейным! Линейное оно лишь при $a \neq 0$.

Теперь мы отдельно исследуем вопрос, что будет, если в уравнении $ax + b = 0$ коэффициент a равен нулю. Получим уравнение:

$$0 \cdot x = b.$$

Произведение $0 \cdot x$, стоящее в левой части уравнения, равно нулю при всех действительных значениях неизвестного x. То есть левая часть уравнения тождественно равна нулю. Следовательно, если $b \neq 0$, то равенство $0 = b$ является неверным числовым равенством, а значит, уравнение корней не имеет.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение $ax + b = 0$ корней не имеет.

Числовое равенство $0 = b$ является верным, только если $b = 0$. В этом случае уравнение примет вид:

$$0 \cdot x = 0.$$

Это верное числовое равенство, независимо от того, какое число мы подставим вместо x.

Если $a = 0$, $b = 0$, то уравнение $ax + b = 0$ имеет бесконечное количество корней, причём его корнем является любое действительное число.

Развиваем умения

Н

1 Что называется линейным уравнением с одним неизвестным? Приведите примеры.

2 Сколько корней имеет линейное уравнение с одним неизвестным? Ответ обоснуйте.

3 Выберите линейные уравнения из предложенных:

а) $2x = 9$;

б) $2x + 3 = 0$;

в) $2x + 3 = x + 1$;

г) $5x - 6 = 8$;

д) $(x + 3)(x + 1) = 0$;

е) $x^2 = x$;

ж) $31 + 3x = 61$;

з) $x + 4x + 3 = 0$.

4 Укажите коэффициенты линейного уравнения:

а) $-x + 17 = 0$;

б) $3x - 8 = 0$;

в) $\frac{2}{3}x + 3 = 0$;

г) $5x + 4,5 = 0$;

д) $x + 18 = 0$;

е) $7x = 0$;

ж) $0,3x - 6 = 0$;

з) $x + 1 = 0$.

5 Решите уравнение $ax + b = 0$, если:

а) $a = -9$, $b = 18$;
б) $a = 5$, $b = -12$;
в) $a = 3$, $b = -9$;
г) $a = -4$, $b = -4$;
д) $a = 0$, $b = -3$;
е) $a = -5$, $b = -3$;
ж) $a = 2{,}5$, $b = 10$;
з) $a = 0$, $b = 0$.

Н

6 Решите уравнение:

а) $-10x + 5 = 0$;
б) $-2x + 1 = 0$;
в) $14x + 21 = 0$;
г) $5x = 0$;
д) $2{,}3x + 4{,}6 = 0$;
е) $4{,}5x - 13{,}5 = 0$;
ж) $22x - 1{,}1 = 0$;
з) $5{,}5x + 22 = 0$.

7 Найдите корни уравнения:

а) $3\frac{1}{3}x - 30 = 0$;
б) $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = 0$;
в) $9x + 4\frac{1}{2} = 0$;
г) $\frac{5}{9}x - 1 = 0$;
д) $1\frac{1}{2}x + 9 = 0$;
е) $\frac{1}{2}x - 1\frac{2}{5} = 0$;
ж) $-147x + 3\frac{1}{2} = 0$;
з) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{8} = 0$.

8 Придумайте линейное уравнение с одним неизвестным, корень которого равен:

а) 2,5; б) -8; в) $-\frac{2}{3}$; г) 0.

П

9 При каких значениях a уравнение не имеет корней:

а) $ax + 5 = 0$;
б) $(a + 3) \cdot x + 5 = 0$;
в) $2x + a = 0$;
г) $ax + a = 0$?

10 При каких значениях a уравнение имеет корень -2:

а) $ax - 2 = 0$;
б) $ax + 2a = 0$;
в) $-3x + a^2 = 0$;
г) $ax + 3a = 0$?

11 При каких значениях a уравнение имеет бесконечное количество корней:

а) $ax + 1 = 0$;

б) $ax + 3a = 0$;

в) $(a + 1) \cdot x + a + 1 = 0$;

г) $(2a + 1) \cdot x + a = 0$?

М

12 Решите уравнение:

а) $|x - 9| = 5$;

б) $|2x + 23| = 14$;

в) $|-5x + 21| = 11$;

г) $|4x - 1| = 7$.

13 Решите уравнение:

а) $5|x| - 14 = 0$;

б) $5|x| + 6 = 0$;

в) $5|x - 3| - 14 = 0$;

г) $5|1 - x| = 0$.

4.3 Методы решения уравнений

Знакомимся с новой темой

Два уравнения называются *равносильными*, если у них одинаковые множества решений.

Как мы уже убедились, решение уравнений сводится к следующему. Данное уравнение заменяем другим, равносильным ему уравнением, но более простым. Полученное уравнение заменяем другим и так до тех пор, пока не получим уравнение вида $x = a$, которое указывает на ответ.

До сих пор при решении уравнений мы опирались на взаимосвязи между компонентами арифметических действий: сложения, вычитания, умножения, деления. Попробуем действовать иначе, опираясь на свойства числовых равенств. Убедимся, что так решать уравнения удобнее.

Воспользуемся следующими свойствами числовых равенств.

I. Равенство останется верным, если к его обеим частям прибавить одно и то же число.

Иначе говоря, если $a = b$, то $a + c = b + c$.

II. Равенство останется верным, если обе его части умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Иначе говоря, если $a = b$, $c \neq 0$, то $a \cdot c = b \cdot c$ и $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Пример 1. Решим уравнение: $3x + 6 = 0$.

Предположим, что x – корень данного уравнения.

Равенство $3x + 6 = 0$ верно. Прибавим к обеим частям уравнения число -6 (свойство I). После преобразований получим:

$$3x = -6.$$

Разделим обе части этого равенства на 3. Равенство останется верным (свойство II):

$$3x : 3 = -6 : 3.$$

Получим: $x = -2$.

Мы стремились получить ситуацию, когда все слагаемые, содержащие неизвестную величину x, оказались в левой части уравнения, а слагаемые, не содержащие x, – в правой.

В дальнейшем мы будем действовать аналогично.

Обратите внимание: на первом шаге преобразований, когда мы прибавляли к обеим частям уравнения число -6, уравнение

$$3x + 6 = 0$$

заменилось на уравнение

$$3x = -6.$$

Произошедшие с уравнением изменения можно описать так: число $+6$, стоявшее в левой части уравнения, исчезло из левой части, но зато в правой части уравнения появилось число -6. Принято говорить, что мы перенесли слагаемое 6 из левой части уравнения в правую, изменив его знак на противоположный.

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 2. Решим уравнение: $20x - 4 = 13x + 3$.

Пусть x – корень уравнения, т. е. равенство верно.

Добавим к обеим частям уравнения $-13x + 4$.

$$20x - 4 - 13x + 4 = 13x + 3 - 13x + 4.$$

Преобразуем левую и правую части полученного уравнения:

$$7x = 7.$$

Разделим обе части уравнения на 7:

$$7x : 7 = 7 : 7.$$

Получим: $x = 1$.

Пример 3. Решим уравнение: $\frac{3x}{2} - \frac{2x-1}{3} = 2$.

Пусть x – корень уравнения, т. е. равенство верно.
Умножим обе части уравнения на 6:

$$\left(\frac{3x}{2} - \frac{2x-1}{3}\right) \cdot 6 = 2 \cdot 6.$$

Преобразуем уравнение:

$$9x - 2(2x - 1) = 12;$$
$$9x - 4x + 2 = 12.$$

Прибавим к обеим частям уравнения -2, а затем разделим обе части на 5:

$$5x = 10;\ x = 2.$$

I. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

II. Если перенести слагаемое из одной части уравнения в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

III. Если к обеим частям уравнения с одним неизвестным прибавить один и тот же многочлен от этого неизвестного, то получим уравнение, равносильное данному.

Пример 4. Решим уравнение: $(2x - 3)(x + 4) = 0$.
Пусть x – корень уравнения, то есть равенство верно.
Произведение равно нулю. Следовательно, хотя бы один из сомножителей равен нулю. Возможно два случая:
1) $2x - 3 = 0$, тогда $2x = 3$; $x = 1,5$;
2) $x + 4 = 0$, тогда $x = -4$.
Ответ: -4; $1,5$.

Развиваем умения

Н

1 Решите уравнение.

а) $4x + 11 = 15$; в) $4x - 9 = 15$;

б) $23 = 2 - 7x$; г) $16 = 2 + 7x$;

д) $18(x+5)=-36$;

е) $7(x-3)=147$;

ж) $-2(x-12)=6$;

з) $13(15-x)=26$.

2 Решите уравнение:

а) $\frac{2}{3}x=-\frac{4}{5}$;

б) $-1\frac{2}{3}x=10$;

в) $0{,}7x=14$;

г) $2{,}5x=10$;

д) $1\frac{2}{3}x=2\frac{1}{3}$;

е) $\frac{1}{5}x=4{,}2$;

ж) $-0{,}6x=5$;

з) $\frac{2}{3}x=4$.

3 Найдите корни уравнения:

а) $2x+9=12+x$;

б) $2x+9=12-x$;

в) $17-3x=2+7x$;

г) $17-3x=2-7x$;

д) $\frac{1}{3}x-4=\frac{1}{4}x-5$;

е) $\frac{5}{9}x+1=\frac{2}{3}x-8$;

ж) $3-\frac{2}{5}x=8-\frac{1}{5}x$;

з) $7-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}x-2$.

Н

4 Найдите корни уравнения:

а) $4(7-3x)-2x=3$;

б) $5(4x-9)-6x=39$;

в) $9-7(8-x)=-180$;

г) $4x-7(5-3x)=240$;

д) $45-4(13-3x)=5$;

е) $18x-5(4+4x)=16$;

ж) $9+4(2x-2)=-15$;

з) $3(4x-3)-2x=76$.

5 Решите уравнение:

а) $\frac{x}{8}=\frac{x-5}{3}$;

б) $\frac{x+7}{4}=\frac{x+8}{5}$;

в) $\frac{x+17}{12}=\frac{x+10}{5}$;

г) $\frac{x-2}{9}=\frac{x+3}{14}$;

д) $\frac{x+3}{2}=\frac{3x-2}{7}$;

е) $\frac{x+7}{3}=\frac{2x+3}{5}$;

ж) $\frac{12-2x}{3}=\frac{3x-1}{4}$;

з) $\frac{2x+9}{5}=\frac{1-3x}{7}$.

6 При каких значениях x выполнены равенства:

а) $\frac{x}{5}-\frac{x}{3}=-\frac{1}{9}$;

б) $\frac{x}{3}+\frac{x+1}{6}=-\frac{1}{18}$;

в) $\frac{x-2}{3}+\frac{x}{2}=6$;

г) $\frac{x+1}{2}-\frac{3-x}{5}=2$;

д) $\frac{5x-3}{5}-\frac{x-3}{3}=2$;

е) $\frac{2x-3}{5}-\frac{x+1}{3}=-1$;

ж) $\frac{3x-4}{3}+\frac{x-5}{4}=1$;

з) $\frac{4x-1}{3}-\frac{5x-24}{12}=-\frac{5}{8}$?

П

7 Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{3}+\frac{x+5}{4}=\frac{x-5}{2}$;

б) $\frac{2x-1}{3}=\frac{x+5}{8}-\frac{1-x}{2}$;

в) $\frac{4-x}{3}-\frac{x+2}{4}=\frac{2-4x}{5}$;

г) $\frac{3x-7}{6}-\frac{2x}{3}=\frac{4+x}{2}$;

д) $\frac{5x+1}{3}-\frac{16-x}{6}=\frac{9x+22}{7}$;

е) $\frac{5x+5}{6}+\frac{x-23}{9}=\frac{4x-5}{5}$;

ж) $\frac{3x+7}{4}=\frac{8x-1}{5}-\frac{50-2x}{9}$;

з) $\frac{2-7x}{8}-\frac{x+14}{3}=\frac{x-8}{5}$.

8 Решите уравнение:

а) $x(x-1)=0$;

б) $(x+3)(x+1)=0$;

в) $(2x-4)(x+1)=0$;

г) $(4x+3)(x+5)=0$;

д) $3x^2-x=0$;

е) $25x^2-5x=0$;

ж) $x^2-1=0$;

з) $4x^2-1=0$.

М

9 Решите уравнение:

а) $x^3=x$;

б) $36x^3=x$;

в) $x^4=4x^2$;

г) $9x^4=4x^2$.

10 Решите уравнение:

а) $(7x-2)^2+25x=1+49x^2$;

б) $(4x+3)^2-10x=16x^2+1$;

в) $(x+3)(x+7)=(x+4)^2$;

г) $(x-3)^2=(x+3)(x-5)$.

11 Решите уравнение:

а) $x(x-3)^2-(x-2)^3=20$;

б) $(x-4)^3-x(x-6)^2=4$;

в) $(x+2)^3=x(x+3)^2+23$;

г) $(x-2)^3=(x+4)(x-5)^2$.

4.4 Задачи на составление уравнений

Знакомимся с новой темой

Уравнения были придуманы как инструмент решения задач.

При решении задач обычно поступают следующим образом:

1) обозначают буквой какую-нибудь неизвестную величину (чаще всего искомую), выражают через неё другие величины, составляют уравнение;

2) решают полученное уравнение;

3) отвечают на вопрос задачи.

Таким образом, сначала условие задачи, записанное словами (например, на русском языке), переводят на язык алгебры (составляют уравнение), затем решают уравнение и записывают ответ словами и цифрами.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Отцу 40 лет, а сыну 12 лет. Сколько лет назад отец был в 5 раз старше сына?

В условии задачи упоминаются четыре величины:

1) возраст отца (40 лет);
2) возраст сына (12 лет);
3) некоторый промежуток времени (неизвестен);
4) соотношение между возрастами отца и сына (5 раз).

Решение. В задаче требуется узнать, сколько лет назад отец был в 5 раз старше сына; обозначим эту величину буквой x.

Отцу было тогда $40 - x$ лет, а сыну $12 - x$ лет, причём первая величина в 5 раз больше второй.

Получим уравнение:

$$40 - x = 5(12 - x).$$

Решим уравнение:
$40 - x = 60 - 5x$;
$4x = 20$;
$x = 5$.
Ответ: 5 лет назад.

Задача 2. Из двух городов, расстояние между которыми 1 071 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Один из них ехал со скоростью 80 км/ч. Найдите скорость второго автомобиля, если известно, что автомобили встретились через 7 ч.

В условии задачи упоминаются четыре величины:

1) расстояние между городами (1 071 км);
2) скорость первого автомобиля (80 км/ч);

3) время в пути (7 часов);

4) скорость второго автомобиля (неизвестна).

Три из этих величин известны, а четвёртая (скорость второго автомобиля) неизвестна, и её необходимо найти.

Решение. Обозначим неизвестную величину буквой x, т. е. будем считать, что скорость второго автомобиля равна x км/ч.

Переведём условие задачи на язык алгебры (составим уравнение):

Первый автомобиль прошёл до встречи $80 \cdot 7 = 560$ км;

Второй автомобиль прошёл до встречи $7x$ км;

Вместе автомобили прошли $560 + 7x$, что согласно условию задачи составило 1 071 км.

Перевод закончен. Составим уравнение:

$$560 + 7x = 1\,071.$$

Решим уравнение:

$7x = 1\,071 - 560;$

$7x = 511;$

$x = 73.$

Ответ: скорость второго автомобиля 73 км/ч.

Следующая задача заимствована из учебника алгебры, написанного великим английским физиком и математиком Исааком Ньютоном (1643–1727) и изданного в 1707 г.

Задача 3. Некий торговец каждый год увеличивал на одну треть своё состояние, уменьшенное на 100 фунтов, которые ежегодно затрачивает на свою семью. Через три года он обнаруживает, что его состояние удвоилось. Спрашивается: сколько у него было денег вначале?

Перевод на язык алгебры Ньютон осуществлял при помощи таблицы.

Словесный текст	На языке алгебры
У торговца имеется состояние.	x
Истратил на семью 100 фунтов, после чего осталось.	$x - 100$
Остаток увеличил на одну треть.	$(x-100) + \frac{1}{3}(x-100) = \frac{1}{3}(4x - 400)$
Истратил на семью 100 фунтов, после чего осталось.	$\frac{1}{3}(4x-400) - 100 = \frac{1}{3}(4x - 700)$
Остаток увеличил на одну треть.	$\frac{1}{3}(4x-700) + \frac{1}{9}(4x-700) = \frac{1}{9}(16x - 2\,800)$
Истратил на семью 100 фунтов, после чего осталось.	$\frac{1}{9}(16x-2\,800) - 100 = \frac{1}{9}(16x - 3\,700)$

Словесный текст	На языке алгебры
Остаток увеличил на одну треть.	$\frac{1}{9}(16x - 3\,700) + \frac{1}{27}(16x - 3\,700) =$ $= \frac{1}{27}(64x - 14\,800)$
Он оказался вдвое богаче, чем был.	$\frac{1}{27}(64x - 14\,800) = 2x$

Решим полученное уравнение:
$64x - 14\,800 = 54x$;
$10x = 14\,800$;
$x = 1\,480$.
Ответ: у купца вначале было 1 480 фунтов.

Развиваем умения

Н

1 Кирпич весит 2 кг и ещё полкирпича. Сколько весит кирпич?

2 Первое число на 63 больше второго, а сумма их равна 129. Найдите меньшее число.

3 В первом ящике 12 кг гвоздей, а во втором 36 кг. Сколько гвоздей нужно переложить из второго ящика в первый, чтобы гвоздей в них стало поровну?

4 Железнодорожный мост длиной 252 м имеет четыре пролёта, из которых три равны между собой, а четвёртый на 12 м длиннее остальных. Найдите длины пролётов.

Н

5 Велосипедист едет со скоростью 10 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 12 км/ч, то приехал бы в пункт назначения на 4 часа раньше. Каково расстояние до пункта назначения?

6 Ученик за 6 часов делает деталей столько же, сколько мастер за 4 часа. Сколько деталей изготовляет ученик за час, если мастер изготовляет за час на 5 деталей больше, чем ученик?

7 Расстояние между двумя пристанями по течению реки катер прошёл за 7 часов, а против течения за 8 часов. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера равна 21 км/ч.

8 Известно, что 10 лет назад отец был в 10 раз старше сына, а через 22 года он будет старше сына только в 2 раза. Сколько лет каждому из них?

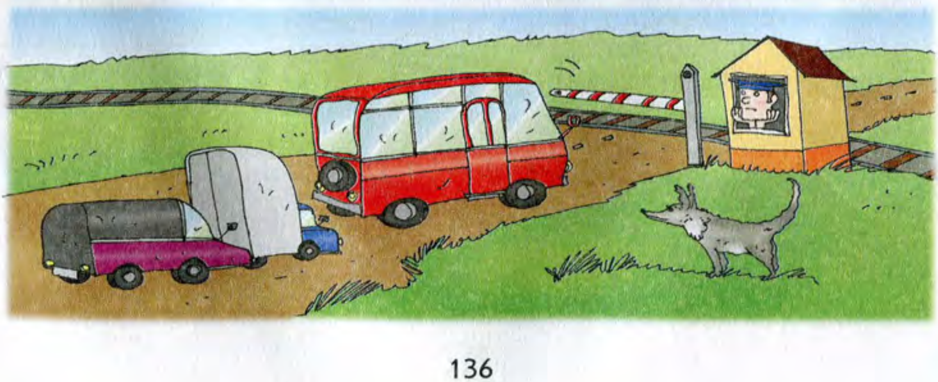
П

9 На заводе три цеха, в которых работает 350 человек. В первом цехе работает вдвое больше рабочих, чем во втором, а в третьем – на 10 больше, чем во втором. Сколько рабочих работает в каждом цехе?

10 За три дня продано 80 кг помидоров. В первый день продано в 2 раза больше, чем во второй, а в третий день в 3 раза меньше, чем во второй. Сколько помидоров продано в каждый из дней?

11 За три дня турист прошёл 90 км. В первый день он прошёл на 10 км больше, чем во второй, а в третий день $\frac{4}{5}$ того, что пройдено в первый и второй день вместе. Какое расстояние проходил турист в каждый из дней?

12 Автобус проехал половину пути со скоростью 50 км/ч, задержался на железнодорожном переезде на 12 минут и, чтобы приехать вовремя, увеличил скорость на 10 км/ч. Какова длина маршрута?



13 Найдите сумму трёх чисел, если первое слагаемое составляет 28% суммы, второе в 2 раза больше первого, а третье равно 32.

М

14 Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 11. Найдите эти числа.

15 Если сторону квадрата уменьшить на 3 см, то его площадь уменьшится на 39 см^2. Найдите площадь квадрата.

16 В бассейн проведены три трубы. Первая труба наполняет его за 5 ч, вторая за 15 ч, а третья – за 3 ч. За какое время наполнится бассейн, если открыть все три трубы?

17 Вася задумал число. Прибавил к нему 28, умножил на 3, отнял 120, разделил на 20 и получил 9. Какое число задумал Вася?

18 Варя задумала число. Умножила его на 3, приписала справа 2, полученное число разделила на 19, к частному прибавила 7 и получила число, втрое больше задуманного. Какое число задумала Варя?

19 Известно, что если в некотором трёхзначном числе цифру 2 перенести из конца в начало, то число увеличится на 18. Найдите число.

20 Известно, что если в некотором трёхзначном числе цифру 4 перенести из конца в начало, то полученное число составит $\frac{3}{4}$ исходного. Найдите число.

21 От шнура отрезали половину и ещё 1 см, от остатка отрезали половину и ещё 1 см, от второго остатка отрезали половину и ещё 1 см. После этого осталось 3 см. Найдите первоначальную длину шнура.

Исследовательский проект «Избыток и недостаток».
Математические знания Древнего Китая были собраны в трактате «Математика в девяти книгах» (окончательно отредактирован во II в. до н.э.), о котором вы уже знаете из курса математики 5-го и 6-го классов. Книга VII этого трактата «Избыток и недостаток» посвящена решению линейных уравнений, систем уравнений и другим вопросам.
Попробуйте, решив предложенную задачу, понять, как работает метод «Избыток и недостаток».
Задача*. Купец продал весь свой товар и получил некоторую сумму денег. Если бы он брал 9 монет за единицу товара, то выручил бы на 42 монеты больше, а если бы брал по 4 монеты, то выручил бы на 28 монет меньше. Какую цену брал купец за единицу товара?

---

* Условие задачи изменено.

Жизненная задача.

СИТУАЦИЯ. Определение возраста по древним письменным источникам.

ВАША РОЛЬ. Историк.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. На могиле великого математика Диофанта, жившего, как предполагают, в III в. н.э., содержится следующая эпитафия:

В этой могиле Диофанта покоится прах,
того Диофанта, который дивным искусством владел,
позволяющим всем из письмен, на этом камне начертанным,
умершего жизни предел рассчитать.
Шестую часть жития по милости Божией
отроком был Диофант неразумным.
Борода у него на лице появилась,
когда миновала двенадцатая часть его жития,
а когда истекла часть седьмая,
младую супругу ввёл Бог под кров его дома,
которая на супружества пятом году
малюткой сыночком его одарила.
Однако жесток был судьбы приговор:
сын молодой в мрачное царство теней отошёл,
достигнув едва половины жизни отца.
Утоляя отцовскую боль,
Диофант среди чисел искал утешенья.
Четыре коротких года спустя
он с жизнью навеки расстался.

ЗАДАНИЕ.

Определите, сколько лет прожил Диофант.

5.1 Линейное уравнение с двумя неизвестными

Знакомимся с новой темой

До сих пор мы рассматривали уравнения с одним неизвестным. На практике встречаются задачи, где неизвестных в уравнении больше.

Уравнением с двумя неизвестными называют равенство, которое содержит два неизвестных числа, как правило, обозначенных буквами латинского алфавита (чаще всего x и y).

Пример 1. Рассмотрим уравнение:

$$3x^2 + 4y = 16.$$

Если вместо букв подставить какие-нибудь числа, то получится числовое равенство. Легко убедиться, что при одних значениях неизвестных оно будет верным, при других – неверным.

Например, если взять $x = 0$, $y = 2$, то получим:

$3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 2 = 8$, или $8 = 16$, – неверное числовое равенство.

Если же взять $x = 2$, $y = 1$, то получим:

$3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 = 16$, или $16 = 16$, – верное числовое равенство.

Решением уравнения с двумя неизвестными называют пару чисел, при подстановке которой в уравнение оно обращается в верное числовое равенство.

Можно сказать, что пара чисел $x = 2$, $y = 1$ является решением уравнения

$$3x^2 + 4y = 16.$$

Пару чисел $x = 2$, $y = 1$ принято записывать в виде (2; 1) в алфавитном порядке, сначала значение x, а потом y.

В таблице приведено ещё несколько решений уравнения $3x^2 + 4y = 16$.

x	0	–2	2	4	–4	6	–6
y	4	1	1	–8	–8	–23	–23

Линейным уравнением с двумя неизвестными принято называть уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c – некоторые числа, причём хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю.

Числа a, b и c называются коэффициентами линейного уравнения с двумя неизвестными. При этом числа a и b называются коэффициентами при неизвестных (соответственно x и y), а число c называется свободным членом.

Пример 2. Уравнение $3x + 4y = 12$ – линейное, оно может быть получено из уравнения $ax + by = c$, если $a = 3$, $b = 4$, $c = 12$. Ещё несколько примеров представлено в таблице.

a	b	c	Уравнение
2	–3	2	$2x - 3y = 2$
2	4	1	$2x + 4y = 1$
0	1	2	$0 \cdot x + 1 \cdot y = 2$

Заметим, что уравнение $0 \cdot x + 1 \cdot y = 2$ принято записывать короче: $y = 2$.

Вернёмся к уравнению $3x + 4y = 12$.

Если в это уравнение подставить $x = 0$, а после этого решить получившееся уравнение с одним неизвестным $3 \cdot 0 + 4y = 12$, или $4y = 12$, то получим $y = 3$.

Это означает, что пара чисел (0; 3) является решением уравнения $3x + 4y = 12$.

Если $x = 2$, то $3 \cdot 2 + 4y = 12$, откуда $4y = 6$, $y = 1{,}5$. Решение: (2; 1,5).

Если $y = 0$, то $3x + 4 \cdot 0 = 12$, $3x = 12$, $x = 4$. Решение: (4; 0).

Если $y = -3$, то $3x + 4 \cdot (-3) = 12$, $3x = 24$, $x = 8$. Решение: (8; –3).

Понятно, что так можно продолжать и дальше.

Таким образом, если вместо одного неизвестного подставить число и затем решить полученное уравнение с одним неизвестным, то получим пару чисел, при подстановке которой в уравнение получается верное числовое равенство, и процесс этот можно продолжать, подставляя всё новые и новые значения неизвестного.

В таблице приведено ещё несколько решений.

x	–1	0	1	2	4	8
y	3,75	3	2,25	1,5	0	–3

Решим линейное уравнение $ax + by = c$ в общем виде.

По определению линейного уравнения с двумя неизвестными один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю. Пусть, скажем, $a \neq 0$, а y – некоторое (произвольное) число, тогда выразим x через y:

$$ax = -by + c;$$

$$x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a},$$

т. е. каждому y соответствует некоторое число x.

Пара $(x; y)$ – решение уравнения $ax + by = c$, и таких решений бесконечно много.

Мы в этом убедились, в явном виде выразив x через y.

Полученный ответ можно записать так: $\left(-\dfrac{b}{a}y + \dfrac{c}{a};\ y\right)$, где y – произвольное действительное число.

Уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечно много решений, если хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю.

Два уравнения называются *равносильными*, если у них одинаковые множества решений.

Для уравнений с двумя неизвестными верны правила, которые были установлены для уравнений с одним неизвестным. В частности:

I. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

II. Если к обеим частям уравнения с двумя неизвестными прибавить один и тот же многочлен от этих неизвестных, то получим уравнение, равносильное данному.

Развиваем умения

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Что называется решением уравнения с двумя неизвестными?

б) Что называется линейным уравнением с двумя неизвестными?

в) Какие уравнения с двумя неизвестными называются равносильными?

2 Проверьте, является ли пара чисел $(-1;\ 2)$ решением уравнения:

а) $x - y = 1$;

б) $2x - 3y = 4$;

в) $2x + 3y = -4$;

г) $x - 3y = 4$;

д) $x = 2y$;

е) $3x + 2y = 1$;

ж) $(x + 1)(y - 5) = 0$;

з) $\dfrac{x+1}{y-2} = 0$.

3 Выберите пары чисел, являющиеся решением уравнения $6x + 12y = 7$:

а) $\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{5}{6}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{2}\right)$;

в) $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{3}\right)$;

г) $\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2}\right)$;

д) $\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{3}\right)$;

е) $\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2}\right)$;

ж) $\left(1;\ \dfrac{1}{12}\right)$;

з) $\left(2;\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

4 Дано уравнение $5x + 2y = 12$. Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её.

x	0			2	−2		−1
y		0	1			−4	

5 Придумайте линейное уравнение с двумя неизвестными, имеющее решение:

а) $x = 2,\ y = 3$;

б) $x = 0,\ y = 0$;

в) $x = -2,\ y = 0$;

г) $x = 1,\ y = -1$.

Н

6 Придумайте линейное уравнение с двумя неизвестными, имеющее решение:

а) (0; 2);

б) (3; 0);

в) (−1; 6);

г) (2; −3).

7 Выразите x через y:

а) $x + y = 1$;

б) $x - 2y = 7$;

в) $x + 4y = 8$;

г) $x - 3y = 1$;

д) $4x - 2y = 8$;

е) $2x + 4y = 6$;

ж) $3x - y = 8$;

з) $2x - 2y = 3$.

8 Выразите y через x:

а) $x + y = 1$;

б) $3x + y = 1$;

в) $2x - y = 2$;

г) $x - 5y = 2$;

д) $x + 2y = 6$;

е) $x - 4y = 0$;

ж) $4x + 2y = -4$;

з) $-6x + 3y = 0$.

П

9 Может ли пара целых чисел быть решением данного уравнения? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему:

а) $x + 10y = 17$;

б) $4x + 2y = 6$;

в) $3x - 6y = 11$;

г) $2x + 10y = 17$.

10 Найдите все решения уравнения, если x и y – натуральные числа:

а) $3x + 2y = 8$;

б) $2x + 3y = 7$;

в) $6x + 3y = 7$;

г) $x + 5y = 6$.

11 Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax + 3y = 36$, если известно, что (5; 2) – решение этого уравнения.

12 Найдите значение коэффициента b в уравнении $x + by = 20$, если $(-4; 6)$ – решение этого уравнения.

13 Найдите значение коэффициента c в уравнении $3x + 4y = c$, если $(11; -14)$ – решение этого уравнения.

М

14 Среди решений уравнения $3x - y = 6$ найдите такие, что значения переменных x и y:

а) равны; б) противоположны.

15 Придумайте линейное уравнение с двумя неизвестными, имеющее данные решения. Сколько таких уравнений существует?

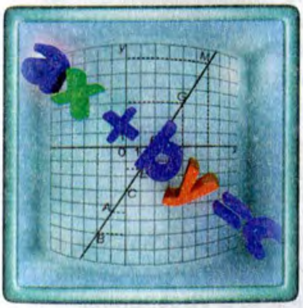
а) $(2; 3)$ и $(0; 0)$;
б) $(0; 2)$ и $(2; 0)$;
в) $(1; 1)$ и $(2; 2)$;
г) $(2; 1)$ и $(1; 2)$.

16 При каких значениях a пара $(a - 1;\ 2a - 1)$ является решением уравнения $x + 2y = 5$?

17 Решите уравнение:

а) $|x + 1| + |y - 1| = 0$;
б) $(x - 2y)^2 + (x - 1)^2 = 0$;
в) $|x + 1| + |x - 1| = 0$;
г) $(x - 3)^2 + |x| = 0$.

5.2 График линейного уравнения с двумя неизвестными



Знакомимся с новой темой

Каждая пара чисел x и y, являющаяся решением уравнения с двумя неизвестными, может быть изображена точкой на координатной плоскости. Все такие точки образуют график уравнения.

График уравнения с двумя неизвестными – множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями уравнения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение:

$$3x - 2y = 6.$$

Запишем несколько решений уравнения $3x - 2y = 6$ в таблицу (так мы уже делали раньше).

x	-1	-2	0	1	2	4
y	$-4{,}5$	-6	-3	$-1{,}5$	0	3

Примем полученные решения за координаты точек $A(-1;\ -4{,}5)$, $B(-2;\ -6)$, $C(0;\ -3)$, $E(1;\ -1{,}5)$, $F(2;\ 0)$, $G(4;\ 3)$ и построим их на координатной плоскости. Можно заметить, что построенные нами точки лежат на одной прямой.

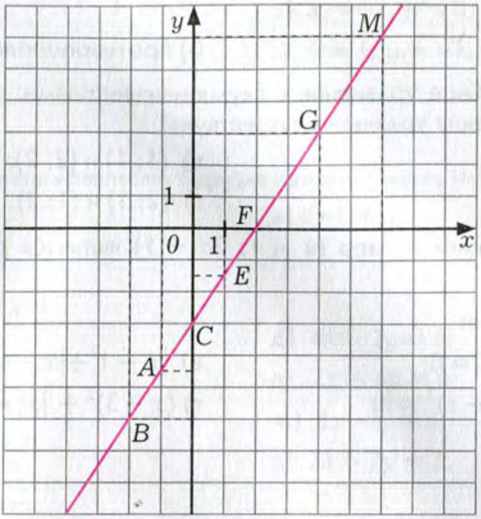


Рис. 4

Более того, можно проверить, что координаты произвольной точки, принадлежащей этой прямой, образуют решение данного уравнения.

Например, точка $M(6;\ 6)$ лежит на данной прямой. Подставим координаты точки M в уравнение. Получим: $3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 = 6$. Это верное числовое равенство, значит, координаты точки $M(6;\ 6)$ действительно задают решение уравнения $3x - 2y = 6$.

Это не случайно. В курсе геометрии будет доказано:

График линейного уравнения с двумя неизвестными – прямая.

Поскольку график линейного уравнения – прямая, а, как известно из курса геометрии, через две точки проходит единственная прямая, то для построения графика линейного уравнения достаточно знать два решения этого уравнения.

Исследуем, как расположен график линейного уравнения $ax + by = c$, если один из коэффициентов a или b равен нулю, а другой отличен от нуля.

Пример 2. Рассмотрим уравнение:

$$0 \cdot x + 5y = 5.$$

Выполним действия в левой части уравнения. Получим: $y = 1$, при этом значения x можно выбирать произвольно, так как $0 \cdot x = 0$ независимо от того, какое значение принимает x.

Этому графику принадлежат, в частности, точки $A(2; 1)$, $B(0; 1)$, $C(-2; 1)$.

График уравнения – прямая, параллельная оси абсцисс.

График линейного уравнения $ax + by = c$, где один из коэффициентов a (или b) равен нулю, а другой отличен от нуля, – прямая, параллельная оси абсцисс (или соответственно оси ординат).

А что будет, если $a = 0$; $b = 0$? Возможны два случая.

Первый случай: $c = 0$.

Решим уравнение:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0.$$

Решением данного уравнения является любая пара чисел, следовательно, график уравнения – вся координатная плоскость.

Второй случай: $c \neq 0$.

Если в уравнении $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ значение c отлично от нуля, то уравнение решений не имеет, а график уравнения не содержит ни одной точки (является пустым множеством).

Развиваем умения

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Что называется графиком уравнения с двумя неизвестными?

б) Что представляет собой график линейного уравнения с двумя неизвестными?

2 Выберите уравнения, графики которых проходят через точку (3; 4):

а) $x - y = -1$;

б) $x - 3y = -9$;

в) $3x - 2y = 1$;

г) $3x - 2y = -1$.

3 Выберите уравнения, графики которых проходят через начало координат:

а) $x - y = 0$;

б) $x + 0 \cdot y = -9$;

в) $x = 0$;

г) $2y = 0$.

4 Точка с абсциссой -3 принадлежит графику уравнения $x - 2y = 10$. Найдите ординату этой точки.

5 Точка с ординатой 1 принадлежит графику уравнения $x - 2y = 10$. Найдите абсциссу этой точки.

6 Постройте графики уравнений:

а) $x + y = 4$;
б) $2x + y = 3$;
в) $x + 3y = -2$;
г) $2x + 3y = 6$;
д) $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$;
е) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$;
ж) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$;
з) $x + \frac{y}{4} = 2$.

Н

7 Постройте графики уравнений:

а) $5x + 0 \cdot y = 10$;
б) $0 \cdot x + 3y = 6$;
в) $2x + 0 \cdot y = 0$;
г) $0 \cdot x - y = 3$;
д) $x - 4 = 0$;
е) $2y - 3 = 0$;
ж) $x - 3 = 0$;
з) $-x - 1 = 0$.

8 Постройте график уравнения $3x - 2y = 5$. В какой точке график уравнения пересекает:

а) ось абсцисс;
б) ось ординат?

9 Выберите уравнение, график которого параллелен оси абсцисс (или оси ординат):

а) $5x + 3{,}2y = 12$;
б) $3x - 6 = 0$;
в) $x + 2y = 0$;
г) $y + 7 = 0$;
д) $x - y = 0$;
е) $8x = 0$;
ж) $3x + y = 0$;
з) $0 \cdot x + y = 0$.

10 Постройте графики уравнений $3x - 4y = 2$ и $x + y = 3$. В какой точке они пересекаются?

П

11 Запишите линейное уравнение, график которого проходит через точку $(-1; 2)$ параллельно оси:

а) абсцисс;
б) ординат.

12 Составьте линейное уравнение с двумя неизвестными, график которого проходит через точку $(-1; -2)$ и начало координат.

13 Графику уравнения $ax + 4y = 4$ принадлежит точка $A(2; 0)$. Найдите значения коэффициента a.

14 Сформулируйте условие, при котором графиком уравнения $ax + by = c$ является прямая, проходящая через начало координат.

М

15 Графику уравнения $ax + by = 1$ принадлежат точки $A(0; -1)$ и $B(1; 0)$. Найдите значения коэффициентов a и b.

16 Постройте график уравнения.

а) $(x-1)(y+2)=0$;

б) $(y-1)(x+2)=0$;

в) $(x-1)(x+2)=0$;

г) $(y-1)(y+2)=0$.

17 При каком значении a графики уравнений $x + 2y = 3$ и $ax + y = 6$ пересекаются на оси абсцисс?

18 Постройте график уравнения.

а) $\dfrac{x-2}{y-2}=0$;

б) $\dfrac{y}{x-2}=0$;

в) $\dfrac{y+2}{x-2}=0$;

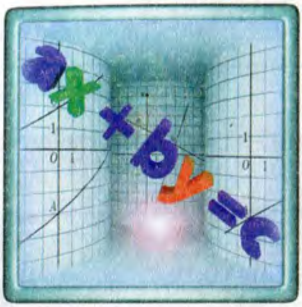
г) $\dfrac{x}{x-2}=0$.

19 График уравнения $4x + 3y = 8$ проходит через точку $(a; 1)$. Найдите значение a.

20 Дано уравнение $ax + 3y = 6$. Начертите в тетради такую же таблицу, определите значение a и заполните пропуски.

x	-1	0	1			
y			3	0	1	2

5.3 Система уравнений с двумя неизвестными. Графический метод решения систем



Знакомимся с новой темой

Пусть дано два уравнения с двумя неизвестными, например:

$$x + 2y = 5 \text{ и } 3x - y = 8.$$

Каждое из этих уравнений имеет бесконечное количество решений.

Если поставлена задача найти общие решения для нескольких уравнений, то говорят, что уравнения образуют *систему*. Системы уравнений принято записывать, используя фигурные скобки.

Пример 1. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x - y = 8. \end{cases}$$

Решением системы уравнений с двумя неизвестными называют пару чисел, являющуюся общим решением уравнений системы, т. е. такую, при подстановке которой в каждое уравнение системы получаются верные числовые равенства.

Решить систему уравнений означает найти все решения системы или доказать, что решений нет.

Проверить, является ли данная пара чисел решением системы уравнений, можно, подставив эти числа в уравнения системы.

Например, пара чисел (3; 1) является решением рассматриваемой системы потому, что при подстановке $x = 3$, $y = 1$ получаются верные числовые равенства:

$$\begin{cases} 3 + 2 \cdot 1 = 5, \\ 3 \cdot 3 - 1 = 8. \end{cases}$$

Пара чисел (−1; 3) не является решением рассматриваемой системы потому, что при подстановке $x = -1$, $y = 3$ одно из уравнений системы (второе) обращается в неверное числовое равенство:

$$3 \cdot (-1) - 3 = 8.$$

Встречаются системы уравнений, не имеющие решений, и системы, имеющие бесконечно много решений. Как же находить все решения систем уравнений? Графический метод решения систем линейных уравнений сводится к отысканию общих точек прямых. Две прямые на плоскости могут быть параллельными, пересекающимися или совпадающими.

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x - y = 8. \end{cases}$$

Построим график каждого из этих уравнений.

Поскольку график линейного уравнения – прямая, для построения каждого из графиков достаточно двух точек.

График первого уравнения проходит через точки $A(1;\ 2)$ и $B(-1;\ 3)$, а график второго – через точки $C(1;\ -5)$ и $D(2;\ -2)$. Координаты точек прямой AB образуют множество решений уравнения $x + 2y = 5$, а координаты точек прямой CD образуют множество решений уравнения $3x - y = 8$.

Если система имеет решение, то точка, соответствующая этому решению, должна лежать на прямых AB и CD.

Из рисунка видно, что прямые AB и CD пересекаются в точке $M(3;\ 1)$. Проверим, что пара чисел (3; 1) является решением данной системы. Подставим (3; 1) в уравнения системы:

$$\begin{cases} 3 + 2 \cdot 1 = 5, \\ 3 \cdot 3 - 1 = 8. \end{cases}$$

Получены верные числовые равенства. Все решения системы найдены.

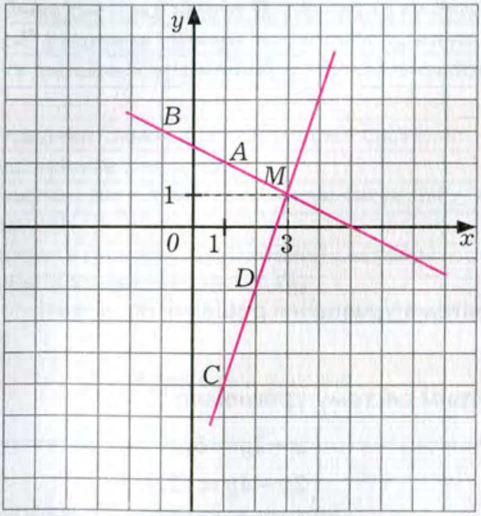


Рис. 5

Отметим, что, вообще говоря, графический метод позволяет находить решения систем уравнений только приближённо. Проверить найденные решения можно, если подставить их в исходную систему.

Итак, графический метод решения систем уравнений состоит в следующем.

1. Строим графики уравнений системы.
2. Находим координаты общих точек графиков (если они существуют).
Координаты найденных точек и образуют множество решений системы.

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y = 6, \\ 2x - 4y = -8. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения будет прямая AB, проходящая через точки $A(0; -3)$ и $B(6; 0)$, графиком второго – прямая CD, проходящая через точки $C(0; 2)$ и $D(-4; 0)$.

Прямые AB и CD параллельны.

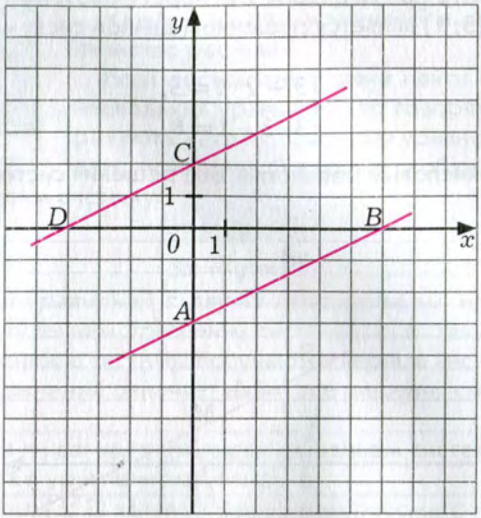


Рис. 6

Следовательно, система уравнений решений не имеет.

Пример 4. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y = 6, \\ 2x - 4y = 12. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения будет изображённая на рис. 7 прямая AB, проходящая через точки $A(0; -3)$ и $B(6; 0)$, графиком второго – та же самая прямая AB. Решениями системы будут координаты точек, принадлежащих прямой AB, а таких точек, как мы знаем, бесконечно много.

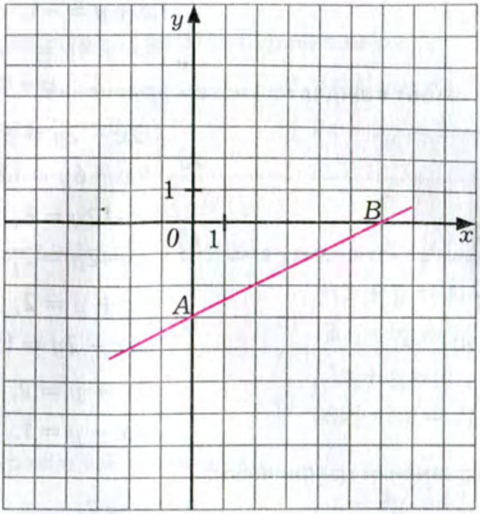


Рис. 7

Следовательно, данная система имеет бесконечно много решений.

Графический способ решения систем позволяет сделать вывод о количестве решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

1. Если прямые – графики линейных уравнений системы – пересекаются, то система имеет единственное решение.
2. Если прямые – графики линейных уравнений системы – параллельны, то система не имеет решений.
3. Если прямые – графики линейных уравнений системы – совпадают, то система имеет бесконечное количество решений.

Развиваем умения

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Что называется решением системы уравнений с двумя неизвестными?

б) Что значит решить систему уравнений с двумя неизвестными?

в) Что нужно сделать, чтобы проверить, является ли данная пара чисел решением системы уравнений с двумя неизвестными?

2 Выберите системы уравнений, решением которых является (1; –2):

а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ 5x + 2y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -2x + y = -4, \\ x + y = -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = -1, \\ 4x + 4y = -4. \end{cases}$

3 Сколько решений имеет каждая из систем уравнений?

а) $\begin{cases} x - 6y = 4, \\ -x + 6y = 5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 9x - 6y = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y = -4, \\ -3x + y = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - 2y = 6, \\ x - 2y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -4x + 7y = 5, \\ 8x - 14y = -10; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 3x - 2y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x + 2y = 14, \\ -2x - 6y = 9; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

4 Решите систему уравнений графически:

а) $\begin{cases} x = 2, \\ -x + 2y = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 2, \\ -3x + 2y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4y = 2, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

Н

5 Решите систему уравнений графически:

а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x = 4, \\ 3x + y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ -x + 3y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$

6 Выберите системы уравнений, решением которых является (1; 3):

а) $\begin{cases} xy = 3, \\ x + y = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2 + y = 5, \\ x - y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y^3 = 28, \\ \dfrac{y}{2x} = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2y = 3, \\ x - y = -2. \end{cases}$

7 Решите систему уравнений графически:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 3y = -2, \\ -x + 3y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

8 Найдите точки пересечения графиков уравнений:

а) $x - 4y = 5$ и $4x - y = 5$;

б) $2x - y = 5$ и $5x - 7y = 8$;

в) $3x + y = 4$ и $6x - 5y = 1$;

г) $2x - 3y = 0$ и $-x + 2y = 1$.

П

9 При каких значениях a и b данная система уравнений не имеет решений:

а) $\begin{cases} 7x + y = 5, \\ ax + by = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + ay = 9, \\ x + y = b; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ax + y = 4, \\ 3x - by = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x + y = a, \\ 6x - bx = 2? \end{cases}$

10 Решите систему уравнений графически.

а) $\begin{cases} 2x - y = 11, \\ 3x + 2y = 19; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x + 2y = 4, \\ 3x + 5y = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 3y = 15, \\ 2x + 3y = 12; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x + 7y = 10, \\ 2x - 5y = -13. \end{cases}$

11 Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений $2x + y = 0$ и $3x - y = 5$. Проходит ли через эту точку график уравнения $x + 4y = -7$?

12 Придумайте систему двух линейных уравнений, единственным решением которой будет пара чисел $(-3; 4)$. Сколько таких систем существует?

М

13 Имеет ли решения система уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x + 2y = 1, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 3y = 5, \\ 2x - 4y = -1? \end{cases}$

14 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x - 1)(x - 2) = 0, \\ x + y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$

5.4 Решение систем уравнений методом подстановки

Вспоминаем то, что знаем

- Как решается линейное уравнение с одним неизвестным?

Открываем новые знания

- В линейном уравнении с двумя неизвестными $2x + y = 4$ выразите y через x. Выразите также x через y.
- Какое из полученных выражений кажется вам проще?

Дана система уравнений: $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ 2x + 3y = 13. \end{cases}$

- Выразите из первого уравнения x через y.
- Подставьте полученное выражение для x во второе уравнение системы.
- Можно ли сказать, что у вас получилось линейное уравнение с одним неизвестным? Каким именно?
- Решите полученное уравнение и найдите y.
- Как теперь, зная y, найти x?
- Найдите x.

?! Как можно решать систему уравнений с двумя неизвестными, выражая одно неизвестное через другое?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Систему линейных уравнений с двумя неизвестными можно решать различными способами.

Пример 1. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 5x + 2y = 17. \end{cases}$$

Предположим, пара чисел $(x; y)$ – решение системы.
Выразим в первом уравнении y через x, получим верное равенство:

$$y = 3x - 8.$$

Подставим найденное выражение во второе уравнение:

$$5x + 2(3x - 8) = 17.$$

Решим полученное уравнение:

$$5x + 6x - 16 = 17;\ 11x = 33;\ x = 3.$$

Найдем y:

$$y = 3 \cdot 3 - 8;\ y = 1.$$

Итак, если пара чисел $(x;\ y)$ – решение системы, то $x = 3$, $y = 1$.

Убедиться, что найденная пара чисел действительно является решением системы, можно подстановкой:

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 - 1 = 8, \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 17. \end{cases}$$

Оба равенства верны. Осталось записать ответ: (3; 1).

Из рассмотренного примера видим, что решение системы уравнений методом подстановки заключается в следующем.

1. В одном из уравнений системы выражаем одно неизвестное через другое.
2. Подставляем полученное выражение в другое уравнение системы.
3. Решаем полученное уравнение с одним неизвестным, находим одно из неизвестных.
4. Подставляем найденное значение неизвестного в полученное ранее выражение для другого неизвестного и находим второе неизвестное.
5. Записываем ответ.

Пример 2. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 23, \\ -4x - 2y = 11. \end{cases}$$

Предположим, пара чисел $(x;\ y)$ – решение системы.
Из первого уравнения получим:

$$y = 23 - 2x.$$

Подставим во второе уравнение:

$$-4x - 2(23 - 2x) = 11, \text{ откуда } -46 = 11.$$

Последнее числовое равенство неверно. Предположив, что $(x;\ y)$ – решение системы, мы получили противоречие.
Следовательно, искомой пары чисел не существует.
Ответ: решений нет.

Методом подстановки можно решать и более сложные системы, если предварительно провести некоторые тождественные преобразования уравнений системы или воспользоваться свойствами равенств.

Пример 3. Решим систему:
$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x+y}{5} = \dfrac{1}{10}, \\ 2x + 5(x - y) = 1. \end{cases}$$

Если умножить первое уравнение системы на 10, а затем раскрыть скобки и привести подобные, то получим равносильное уравнение. Если во втором уравнении раскрыть скобки и привести подобные, то получим равносильное уравнение. Система, образованная этими уравнениями, будет иметь те же решения, что и исходная система (такие системы называются *равносильными*).

Получим:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 7x - 5y = 1. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом подстановки.

Выразим x через y:
$$3x = 2y + 1;\ x = \frac{2y+1}{3}.$$

Подставим полученное выражение для x во второе уравнение:
$$\frac{7(2y+1)}{3} - 5y = 1;$$
$$14y + 7 - 15y = 3;$$
$$y = 4.$$

Найдем x:
$$x = \frac{2 \cdot 4 + 1}{3} = 3.$$

Запишем ответ: (3; 4).

Можно сделать вывод: решая системы уравнений, полезно проводить тождественные преобразования уравнений. При этом получаются системы, равносильные исходным.

Развиваем умения

Н

1 Выразите y через x:

а) $x + y = 0$;
б) $-2x + y = 5$;
в) $x - y = -5$;
г) $-2x + 4y = 0$;
д) $7x - 3y = -2$;
е) $3x - 5y = 15$;
ж) $5x + 3y = 15$;
з) $2x + 2y = 8$.

2 Выразите x через y:

а) $3x + y = 0$;

б) $-x + 2y = 3$;

в) $x - y = 2$;

г) $x + 4y = 1$;

д) $5x - 4y = 6$;

е) $3x + 2y = 6$;

ж) $2x - 5y = 2$;

з) $4x + 2y = 10$.

3 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} -2x = 8, \\ 2x + y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x = 8, \\ x + 9y = -8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ x - 3y = -5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x + 5y = 12; \end{cases}$

д) $\begin{cases} -2x + 3y = 9, \\ x - y = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ 3x - 2y = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x + 2y = 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ 5x + 2y = 6. \end{cases}$

Н

4 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 5x + y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y = 2, \\ x - 3y = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -2x + 3y = 9, \\ -x + y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 5y = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ 4x - 2y = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 5x - 2y = 9; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 2y = 11. \end{cases}$

5 Найдите решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 5x + y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3y + 8x = 5, \\ y + 4x = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + y = 3, \\ 3x - 2y = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x + y = 14, \\ 3x - 2y = -2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y + 5x = 7, \\ 3x + 2y = -5; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 3x + 5y = 3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases}4x+y=3,\\6x-5y=11\end{cases}$ з) $\begin{cases}6x-7y=2,\\5x-6y=1.\end{cases}$

6 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{3}{4},\\x-\dfrac{y}{3}=\dfrac{2}{3};\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{7}=\dfrac{15}{14},\\\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=\dfrac{3}{2};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+y=\dfrac{2}{3},\\\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{7}{6};\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{x}{5}+y=7,\\\dfrac{x}{3}+\dfrac{2y}{9}=3.\end{cases}$

П

7 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x+y)=14,\\\dfrac{1}{4}(x-2y)=6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2x-y)=1,\\\dfrac{1}{3}(3x-2y)=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}(5x-y)=2,\\\dfrac{1}{4}(4x-3y)=-1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{1}{5}(3x+4y)=11,\\\dfrac{1}{4}(7x-y)=14.\end{cases}$

8 При каких значениях a и b данная система уравнений имеет решение (2; 1):

а) $\begin{cases}3x+y=a,\\2x-3y=b;\end{cases}$ в) $\begin{cases}-x+y=a,\\2x-by=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}ax+y=3,\\bx-3y=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x+y=a,\\2x-by=1?\end{cases}$

9 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}4(x+2y)=5x+6,\\3(2x-y)=24y+6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dfrac{x+11}{2}-\dfrac{y+13}{3}=2,\\5x-3y=8;\end{cases}$

б) $\begin{cases}5(x-3y)=2x+7,\\3(x+6y)=9y+15;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{5x-3y}{4}=\dfrac{x-5y}{3},\\7x+y=12.\end{cases}$

10 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x-3y=1, \\ x+2y=25, \\ -4x+5y=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+5y=15, \\ -x+3y=-2, \\ 3x-11y=4. \end{cases}$

М

11 При каких значениях a графики уравнений $2x-y=5$, $3x-2y=3$, $ax+y=16$ пересекаются в одной точке?

12 Решите систему уравнений:

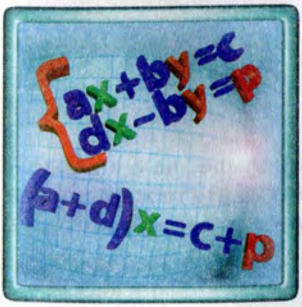
а) $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=5, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=5, \\ x^2-y^2=14. \end{cases}$

13 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x-y)(x+2y)=0, \\ x-2y=4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x+2)^2-(x-1)^2=9y, \\ (y+2)^2-(y-3)^2=5x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+4y)(x-2y)=0, \\ x+2y=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+5)^2-x^2=5y, \\ (y-3)^2-y^2=3x. \end{cases}$

5.5 Метод сложения



Вспоминаем то, что знаем

Закончите предложения.

а) Если сложить два верных числовых равенства, то ...

б) Если умножить или разделить обе части верного числового равенства на любое ненулевое число, то ...

Открываем новые знания

Дана система уравнений: $\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 7x-3y=1. \end{cases}$

- Что получится, если сложить уравнения этой системы?
- Сколько неизвестных в полученном уравнении?
- Решите полученное уравнение и найдите x.
- Как теперь, зная x, найти y?
- Найдите y.

?! Как можно решить систему, если коэффициенты при одном и том же неизвестном в разных уравнениях являются противоположными числами?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Другой метод решения систем уравнений – *метод выравнивания коэффициентов*, или, как его чаще называют, *метод сложения*.

Пример 1. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 10, \\ x + 2y = 14. \end{cases}$$

Предположим, пара чисел $(x;\ y)$ – решение системы, тогда оба уравнения представляют собой верные равенства.

Коэффициенты при y в первом и втором уравнениях – противоположные числа. Сложим левые и правые части уравнений почленно:

$$5x - 2y + x + 2y = 10 + 14.$$

После приведения подобных слагаемых получим уравнение с одним неизвестным:

$$6x = 24, \text{ откуда } x = 4.$$

Значение x найдено. Подставив его во второе уравнение, получим уравнение:

$$4 + 2y = 14;\ y = 5.$$

Следовательно: $x = 4$; $y = 5$.
Ответ: $(4;\ 5)$.

Пример 2. Решим систему:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 2, \\ 6x - 11y = 26. \end{cases}$$

Коэффициент при x во втором уравнении в три раза больше, чем в первом. Умножим первое уравнение на -3. Новое уравнение будет иметь те же решения, что и исходное уравнение, но теперь коэффициенты при x в первом и втором уравнениях – противоположные числа.

$$\begin{cases} -6x + 21y = -6, \\ 6x - 11y = 26. \end{cases}$$

Сложим уравнения почленно:

$$10y = 20; \; y = 2.$$

Значение y найдено.
Подставим его в уравнение $2x - 7y = 2$.
Получим: $2x - 7 \cdot 2 = 2$; $x = 8$.
Следовательно: $x = 8$, $y = 2$.
Ответ: (8; 2).

Пример 3. Решим систему:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 21, \\ 4x - 3y = -5. \end{cases}$$

Сделаем коэффициенты при одном из неизвестных, например, при x, противоположными числами. Для этого умножим первое уравнение на 2, а второе на -3. Получим:

$$\begin{cases} 12x + 10y = 42, \\ -12x + 9y = 15. \end{cases}$$

Сложим уравнения почленно:

$$19y = 57; \; y = 3.$$

Подставим $y = 3$ в уравнение $4x - 3y = -5$. Получим:

$$4x - 3 \cdot 3 = -5; \; 4x = 4; \; x = 1.$$

Ответ: (1; 3).
Итак, при решении систем уравнений методом сложения поступают следующим образом.

1. Уравнивают абсолютные величины коэффициентов при одном из неизвестных так, чтобы коэффициенты стали противоположными числами.
2. Складывают полученные уравнения почленно.
3. Решают полученное уравнение с одним неизвестным.
4. Подставляют найденное значение неизвестного в одно из уравнений исходной системы и решают полученное уравнение.

Развиваем умения

Н

1 Известно, что $x + 2y = 3$ и $4x - y = 4$. Методом сложения найдите значения выражений:

а) $5x + y$; б) $3x - 3y$; в) $x - y$; г) $6x + 3y$.

2 Какая из данных систем не имеет решений? имеет бесконечно много решений? имеет единственное решение?

а) $\begin{cases} -2x+3y=10, \\ -2x+5y=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-6y=4, \\ -x+6y=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y=-4, \\ -3x+y=2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x+12y=8, \\ x+6y=-8; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x-3y=-8, \\ -7x+3y=8; \end{cases}$

е) $\begin{cases} -4x+7y=5, \\ 8x-14y=-10; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x+y=14, \\ -2x+y=9; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x-3y=8, \\ -4x+6y=16. \end{cases}$

3 Решите систему уравнений методом сложения:

а) $\begin{cases} x+y=7, \\ -x-y=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+4y=7, \\ -x+2y=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y=7, \\ x+2y=-1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x+y=7, \\ -3x+2y=5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x-2y=8, \\ x-3y=6; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x-y=8, \\ 3x-y=6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x-y=8, \\ 2x-3y=4; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 3x+2y=9, \\ x+2y=3. \end{cases}$

Н

4 Найдите решения систем, используя метод выравнивания коэффициентов:

а) $\begin{cases} x-y=3, \\ 3x+4y=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y=4, \\ x+3y=-7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-y=8, \\ x+2y=-2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-3y=-5, \\ 2x-5y=-7; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x+y=14, \\ 3x-2y=-2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x+3y=10, \\ x-2y=-9; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 5x+y=2, \\ 2x-3y=11; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x-6y=-2, \\ 2x+3y=11. \end{cases}$

5 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 6x-4y=3, \\ -3x+2y=4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 4x-2y=3, \\ 3x+4y=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-9y=3, \\ 2x+3y=5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x-9y=2, \\ 5x+3y=-14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x-9y=-24, \\ -4x+3y=-6; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 5x+6y=10, \\ 2x-3y=4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x-2y=1, \\ 15x+3y=3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 20x-7y=-5, \\ 40x+3y=-10. \end{cases}$

П

6 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=\frac{5}{6}, \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{1}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{5}{6}, \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y=\frac{1}{20}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y=\frac{3}{8}, \\ \frac{1}{9}x-\frac{2}{9}y=\frac{1}{6}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=1\frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4}x-\frac{1}{8}y=1. \end{cases}$

7 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x-2y=3, \\ x+y=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=12, \\ 3x+2y=48, \\ x-y=1. \end{cases}$

8 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x-2y)+(x-5y)=7, \\ (x-2y)-(x-5y)=-3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x-y)+2(x+y)=3, \\ (x-y)+(x+y)=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x-2y}{4}+\frac{x+5y}{2}=-1, \\ \frac{x-2y}{2}+\frac{x+5y}{4}=2\frac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=4, \\ \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{6}=5. \end{cases}$

9 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=7, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{y-1}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{y-1}=\dfrac{1}{12}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-2}+\dfrac{3}{y+1}=\dfrac{8}{15}, \\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{5}{y+1}=-\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

М

10 Решите уравнение:

а) $(2x+3y-5)^2+(x+y-2)^2=0$;

б) $(2x-3y+1)^2+(x-y-1)^2=0$;

в) $|x-y+3|+|2x-y|=0$;

г) $|2x-y+3|+|x-y-2|=0$.

11 Решите систему уравнений:

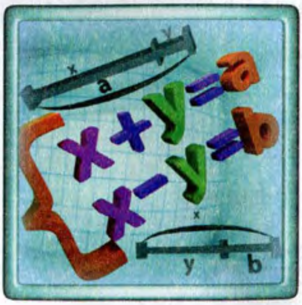
а) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-y^2=21; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+2y=7, \\ x^2-4y^2=77; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=8, \\ x^2-y^2=80; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x+2y=11, \\ 9x^2-4y^2=77. \end{cases}$

5.6 Решение задач с помощью систем уравнений



Знакомимся с новой темой

Ранее мы решали задачи с помощью уравнения с одним неизвестным. Попробуем решать их с помощью систем уравнений. Будем действовать аналогично тому, как мы действовали ранее, только обозначать буквами будем не одну неизвестную величину, а две.

При решении задачи с помощью систем уравнений обычно действуют следующим образом:

1) обозначают буквами какие-нибудь неизвестные величины, выражают через них другие величины, составляют систему уравнений;

2) решают полученную систему;
3) отвечают на вопрос задачи.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Сумма двух чисел равна 61. Найдите эти числа, если их разность равна 85.

Введём обозначения:
1) x – первое число, y – второе число;
2) $x + y$ – сумма, по условию сумма равна 61;
3) $x - y$ – разность, разность равна 85.
4) Получили систему:
$$\begin{cases} x+y=61, \\ x-y=85. \end{cases}$$
5) Систему решим методом сложения.
Получим ответ: 73 и –12.

Задача 2*. Купец купил 138 аршин чёрного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается: сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а чёрное 3 руб.?

Введем обозначения:
1) чёрного сукна куплено x аршин, синего куплено y аршин;
2) по условию
$$x + y = 138.$$
Одно уравнение составлено. Для составления второго уравнения используем другие данные задачи:
3) стоимость чёрного сукна $3x$ руб., стоимость синего сукна $5y$ руб.;
4) по условию
$$3x + 5y = 540.$$
5) Составим систему уравнений:
$$\begin{cases} x+y=138, \\ 3x+5y=540. \end{cases}$$
Решим её методом подстановки.
Выразим одно неизвестное через другое:
$$x = 138 - y.$$
Подставим во второе уравнение:
$$3(138 - y) + 5y = 540;$$
$$414 - 3y + 5y = 540;$$
$$2y = 126;$$
$$y = 63.$$
Найдём значение x:
$$x = 138 - 63 = 75.$$
Ответ: куплено 75 аршин чёрного сукна и 63 аршина синего.

* См. рассказ А.П. Чехова «Репетитор».

Развиваем умения

Н

1 Мать старше дочери на 23 года, а вместе им 51 год. Сколько лет дочери?

2 Девять лет назад брат был вдвое старше сестры. Сколько лет брату и сколько сестре, если брат старше сестры на 4 года?

3 Скорость парохода по течению реки 23 км / ч, а против течения 18 км / ч. Найдите скорость течения реки.

4 По течению реки катер проходит 40 км за 2 ч, против течения 35 км за 2,5 ч. Найдите собственную скорость катера.

5 Сумма двух чисел равна 180, частное от деления первого числа на второе равно 5. Найдите эти числа.

Н

6 Величина одного из углов треугольника равна 16°, а разность двух других равна 28°. Найдите величины углов треугольника.

7 Двое рабочих за 5 часов могут сделать 115 деталей. Если первый рабочий будет работать 3 часа, а второй 4 часа, то они сделают вместе 81 деталь. Сколько деталей сделает каждый из них за час?

8 Сумма двух положительных чисел равна 120, причём первое число составляет 40% второго. Найдите эти числа.

9 Разность двух положительных чисел равна 40, причём первое число составляет 25% второго. Найдите эти числа.

10 «Если мне дадут, – сказал мальчик, – ещё 40 орехов, то у меня будет столько же орехов, сколько у моего брата, а если мне дадут 90 орехов, то меня станет вдвое более, нежели у моего брата». Сколько он и брат его имели орехов? (Задача П. Л. Чебышёва*.)

П

11 В кошельке несколько десятирублёвых и пятирублёвых монет на сумму 65 рублей. Может ли в кошельке оказаться 8 монет? 10 монет?

* Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894) – выдающийся русский математик.

12 Разность двух натуральных чисел равна 48. Если первое число разделить на второе, то в частном получится 4, а в остатке 3. Найдите эти числа.

13 Имеется два сорта чая: по цене 480 руб. за 1 кг и по цене 380 руб. за 1 кг. Сколько чая каждого сорта надо взять, чтобы получилось 50 кг смеси по цене 420 руб. за 1 кг?

14 В 2 коробки и 7 ящиков вмещается 124 кг груш, а в такие же 4 коробки и 5 ящиков – 104 кг. На сколько вместимость ящика больше вместимости коробки?

М

15 Сумма двух чисел равна 24, а разность их квадратов равна 48. Найдите эти числа.

16 Разность двух чисел равна 4, а разность их квадратов равна 56. Найдите эти числа.

17 Если одну сторону прямоугольника увеличить на 30%, а другую уменьшить на 10%, то периметр увеличится на 12 см. Если же первую сторону уменьшить на 10%, а вторую уменьшить на 20%, то периметр уменьшится на 32 см. Найдите периметр прямоугольника.

18 Известно, что 30% числа a на 10 больше 20% числа b, а 30% числа b на 35 больше, чем 20% числа a. Найдите числа a и b.

19 Если задуманное двузначное число сложить с суммой его цифр, то получится 68. Если же из этого двузначного числа вычесть 45, то получится двузначное число, записанное с помощью тех же цифр, что и первоначальное. Какое число задумано?

20 Катер за 3 ч прошёл 24 км по течению реки и 15 км против течения. В другой раз он за 4 ч прошёл 8 км по течению реки и 35 км против течения. Найдите скорость катера и скорость течения реки.

Жизненная задача.
СИТУАЦИЯ. Определение возраста по косвенным данным.
ВАША РОЛЬ. Следователь.
ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Как известно из свидетельских показаний, разыскиваемый человек говорил, что его возраст равен сумме цифр его года рождения.
ЗАДАНИЕ. Определите возраст разыскиваемого.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

К параграфу 1.1 Алгебраические выражения

1. а) Что такое числовое выражение? б) Когда оно имеет смысл, а когда нет? в) Что такое буквенное выражение? г) Что такое алгебраическое выражение? д) Когда алгебраическое выражение теряет смысл?

2. Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её значениями выражений при заданных значениях переменных.

a	2	$-\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{19}{4}$	$\dfrac{20}{11}$	−0,5	5
x	3	$\dfrac{1}{5}$	$-\dfrac{8}{13}$	$-\dfrac{9}{10}$	−1,3	$\dfrac{2}{9}$
s	−7	13	$\dfrac{19}{20}$	3	3,8	0,75
$\dfrac{a+x^2-s}{a-xs}$						
$(a+x)s^2-x+a^3$						
$\dfrac{(axs)^2+2axs+1}{2a+8x+3s}$						

3. Укажите, при каких значениях переменных выражение имеет смысл и при каких не имеет смысла:

а) $a+\dfrac{1}{3+a}-\dfrac{a+1}{a-9}$;

б) $\dfrac{s^3+27}{5s-3}$;

в) $\dfrac{q^{10}-50q^5+1}{q^6}+\dfrac{1}{q-11}$;

г) $\dfrac{w^5-w^4+w^3-w^2+w-1}{(w-5)(w+2)}$.

4. Запишите буквенное выражение для нахождения нужной величины.

а) Ребро куба было равно a м. Его увеличили в x раз, а затем удлинили на z м. На сколько м^3 и во сколько раз увеличился объём куба?

б) Из города А в город Б ведут 3 дороги. По первой может проехать m машин в час, по второй в 1,5 раза больше, чем по первой, а по третьей меньше, чем по первой и по второй, вместе взятым, на 17 машин. Сколько машин может проехать из города А в город Б за пять часов?

в) Первый рабочий делает w деталей в час, второй делает q деталей за t часов. Сколько деталей сделают оба рабочих, работая вместе, за три часа?

г) Цена почтовой марки А больше цены марки Б на k рублей; марка Б стоит в l раз больше, чем марки В и Г, взятые вместе; марка В дешевле марки Г на n рублей, а марка Г стоит m рублей. Сколько будет стоить покупка i марок А, j марок Б, p марок В и q марок Г?

д) Строится n-этажный дом, общая площадь полов которого равна S м^2. Одна сторона прямоугольного фундамента этого дома равна a м. Какова длина второй стороны (в метрах)?

е) Катер, собственная скорость которого b км/ч, проплыл из пункта А в пункт Б по течению, сделал остановку на x ч, во время которой ему поставили новый мотор, увеличивший его собственную скорость на 20%, после чего вернулся назад в пункт Б. Через какое время после выхода из пункта А катер вернулся в пункт Б, если расстояние от А до Б равно R км, а скорость течения реки на участке между пунктами А и Б равна c км/ч?

К параграфу 1.2 Степени с натуральными показателями и их свойства

1. а) Что такое степень с натуральным показателем?

б) Что такое основание степени и показатель степени?

в) Что такое стандартный вид числа?

2. Упростите, записав некоторые произведения в виде степеней. Укажите основание степени и показатель степени для каждой из степеней полученного упрощённого произведения:

а) $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$;

б) $x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot x \cdot z \cdot x \cdot z \cdot y$;

в) $(x+1) \cdot (x+1) \cdot (y+1) \cdot (x+1)$;

г) $s \cdot (-s) \cdot s \cdot (-s) \cdot (-s) \cdot s \cdot (-s)$;

д) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$;

е) $5 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot 5 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot x \cdot x$;

ж) $z^2 \cdot z^a \cdot z^2 \cdot z^2 \cdot z^a \cdot z^2 \cdot z^a \cdot z^2$;

з) $t \cdot 2 \cdot t \cdot t \cdot t \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{t}{a} \cdot \frac{2}{a} \cdot 2 \cdot 2 \cdot t$.

3. Запишите произведение степеней в виде произведения, расписав каждую степень в виде произведения:

а) $x^2 \cdot y^2 \cdot 2^4$;

б) $(-0{,}1)^4 \cdot (x+a)^2 \cdot (x+a)^2$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$;

г) $a^1 \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot d^4 \cdot e^5$;

д) $6^5 \cdot 5^6$;

е) $y^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot t^3$;

ж) $\left(w+\frac{1}{w}\right)^3 \cdot \left(W-\frac{1}{W}\right)^4$;

з) $2^5 \cdot x^5 \cdot q^2 \cdot g^4$.

4. Используя степени, запишите в виде суммы разрядных слагаемых число:

а) 745 940 846 497;

б) 5 458 176 845;

в) 7 905 150;

г) 411 534 493 555.

5. Запишите число, заданное с помощью суммы разрядных слагаемых:

а) $7\cdot 10^8+6\cdot 10^7+7\cdot 10^5+8\cdot 10^3+5\cdot 10^2+1\cdot 10$;

б) $5\cdot 10^8+5\cdot 10^6+8\cdot 10^4+9\cdot 10^3+7\cdot 10^2+5\cdot 10+6$;

в) $4\cdot 10^8+8\cdot 10^7+3\cdot 10^6+6\cdot 10^5+6\cdot 10^4+6\cdot 10^3+8\cdot 10+7$;

г) $1\cdot 10^8+8\cdot 10^7+7\cdot 10^6+6\cdot 10^5+7\cdot 10^4+4\cdot 10^3+8\cdot 10^2+9\cdot 10+2$.

6. Запишите число в стандартном виде:

а) 15 245 000 000 000 000 000 000 000;

б) 18 384 600 000 000 000 000 000 000 000 000;

в) 598 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000;

г) $0{,}134 \cdot 10^{13}$.

7. Запишите в виде целого числа или десятичной дроби:

а) $7{,}8719 \cdot 10^8$;

б) $9{,}939426 \cdot 10^8$;

в) $6{,}004 \cdot 10^{18}$;

г) $7{,}1084 \cdot 10^7$.

8. Установите порядок выполнения действий и найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 3^4-2\cdot 0{,}12}{0{,}13+(0{,}1)^2}:3$;

б) $\left(\left(\frac{7}{5}\right)^3\cdot 25^2-11:2\right)\cdot 1\,000$;

в) $(2^{10}:2^4+3^5:3^2-11)\cdot(0{,}2)^3$;

г) $\left(\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{8}\right)\cdot 3^4-\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\right)\cdot 4^3\right):\left(-\frac{3}{5}\right)^3$.

9. При каких натуральных значениях x значение выражения положительно:

а) $(-2)^{5x+3}$;

б) $(-3)^2\cdot(-2{,}35)^{x+3}\cdot(-1{,}001)^{2x+3}$;

в) $(-1)^x\cdot(-1)^{2x}\cdot(-1)^{3x}\cdot(-1)^{4x}\cdot(-1)^{5x}$;

г) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{5x+6}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{2x+4}\cdot(-1)^{8x+1}$?

К параграфу 1.3 Умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями

1. Сформулируйте правило умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями.

2. Найдите значение числового выражения:

а) $\dfrac{2^{124} \cdot 3^{19} \cdot 1\,944}{2^{124} \cdot 3^{22}}$;

б) $\dfrac{100\,000 \cdot 5^{1\,234} \cdot 2\,025}{10^4 \cdot 5^{1\,229} \cdot 5\,625}$;

в) $\dfrac{11^{11} \cdot 12^{12} \cdot 13^{13} \cdot 14^{14}}{1\,452 \cdot 2\,366 \cdot 11^8 \cdot 12^{11} \cdot 13^{11} \cdot 14^{12}}$;

г) $\dfrac{1\,024 \cdot 2^{10} \cdot 59\,049 \cdot 3^{10}}{216 \cdot 2^{16} \cdot 3^{17}}$.

3. Как найти степени $n + 3$ и $n - 2$ числа a, если дана вычисленная n-я степень числа a?

4. Упростите выражение:

а) $x^{123} \cdot x^{14} \cdot y^{345} \cdot x^{24} \cdot y^3 \cdot y^{32}$;

б) $(1\,030\,301 \cdot 101^{101}) : 101^{45}$;

в) $\dfrac{10 \cdot 10^{10} \cdot 10^{100} \cdot 10^{1\,000}}{0{,}0001 \cdot 10^{22} \cdot 10^{1\,090}}$;

г) $\dfrac{(0{,}001)^{22} \cdot s^{287} : s^7}{(0{,}001)^{20} \cdot s^{200} \cdot s^{80} \cdot (0{,}001)^2}$;

д) $\dfrac{2^n \cdot 2^m \cdot (0{,}3)^6 \cdot 2^{2n+3m} \cdot 3^{10\,000}}{2^{3n+3m} \cdot 3^{9\,990} \cdot 243 \cdot 81 \cdot 0{,}027}$;

е) $\dfrac{4\,913 \cdot 17^{17} \cdot 16^{20} \cdot (a^2 + b)^{200}}{4\,096 \cdot 16^{16} \cdot 17^{19} \cdot 16^{20} \cdot (a^2 + b)^{199}}$.

К параграфу 1.4 Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями. Возведение степени в степень

1. а) Сформулируйте правило умножения и деления степеней с одинаковыми показателями.
б) Как возводится степень в степень?

2. Выполните действия:

а) $\dfrac{(a^{23})^2 (b^3c^3d)^3}{(a^{22})^2 b^9c^9d^2}$;

б) $\dfrac{(4x^2y^5z^{18}t^{19}p^2q^{34})^7}{(2xy^2z^3t^8pq^{17})^{14}}$;

в) $\left(\left((3^5)^5 3^5\right)^5 3^5\right)^5 : 3^{775}$;

г) $\dfrac{8^8 \cdot 32^{32}}{4^{12} \cdot 2^{160}} \cdot \dfrac{(x^{165})^5 : (x^3)^{17}}{x^{770} \cdot (x^2)^2}$.

3. Представьте произведение в виде степени:

а) $1024 \cdot 2\,048 \cdot 4\,096 \cdot 8192$;

б) $(2^2)^{(2^2)} \cdot (4^4)^{(4^4)}$;

в) $2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{25} \cdot 7^{49} \cdot 210^{210} \cdot 1\,680^8$;

г) $(x^2)^5 \cdot (x^5)^2 \cdot x^{26} \cdot x^{27} \cdot x^{82}$.

4. Вычислите:

а) $\left(\dfrac{2^{26}}{3^{72}}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{3^{504}}{2^{180}}\right)^2 \cdot \dfrac{2^{179}}{3^{502}}$;

б) $\dfrac{12^{144} \cdot 6^{17} \cdot 3^{13} \cdot 2^{132}}{3^{172} \cdot 2^{430}}$;

в) $\dfrac{0{,}000001 \cdot 0{,}0000001 \cdot 10^{12} \cdot (0{,}2)^{11}}{0{,}00032 \cdot (0{,}2)^8}$;

г) $\dfrac{1}{3^{334} \cdot 7^{167}} \cdot \left(\dfrac{0{,}1234 \cdot 7^{82}}{0{,}4321 \cdot 9^{63}}\right)^{167} \cdot \left(\dfrac{9^{64} \cdot 0{,}4321}{7^{81} \cdot 0{,}1234}\right)^{167}$.

5. Представьте в виде степени:

а) $a^{351} b^{221} c^{273} d^{572}$;

б) $8\,192 \cdot 2^7 \cdot x^{10} \cdot y^{20} \cdot z^{70}$;

в) $\dfrac{8^{12}}{2^{24}} \cdot \dfrac{x^{28}}{y^{52}} \cdot \left(w + \dfrac{1}{w}\right)^{76}$;

г) $\dfrac{2\,401}{625} \cdot \dfrac{j^{76} q^{52} w^{68}}{i^{16} t^{48}} \cdot \left(\dfrac{r^{21}}{R^{22}}\right)^4$.

К параграфу 1.5 Одночлены

1. а) Что такое одночлен?
б) Что такое буквенная часть одночлена и коэффициент одночлена?
в) Что значит, что одночлен имеет стандартный вид?
г) Что такое степень одночлена, для каких одночленов она равна нулю?
д) Что такое нулевой одночлен?

2. Запишите одночлен в стандартном виде:

а) $7 \cdot x^2yz \cdot 8xy \cdot 9z^3$;

б) $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)a \cdot 6b^{11} \cdot \dfrac{1}{11}a^{10}c^2$;

в) $0{,}12v \cdot (-0{,}3)u \cdot 100u^3v^3w^4$;

г) $\dfrac{1}{2}t \cdot 2t^3 \cdot \dfrac{1}{3}z^5 \cdot 33f^4$.

3. Найдите значение одночлена при указанных значениях букв:

а) $\dfrac{1}{81}r^{11}d^3s^8j^4$ при $r = 2$, $d = \dfrac{1}{2}$, $s = 0{,}5$, $j = 3$;

б) $10^{17}p^{56}q^{47}r^{30}s^{17}t^{95}$ при $q = 0{,}1$, $p = 1$, $r = 10$, $s = 3^6$, $t = \dfrac{1}{3}$.

4. Определите коэффициент и степень одночлена:

а) $-75m^{11}t^{14}y^{23}z^{34}$;

б) $4c^{12}g^{17}u^{22}vx^{40}$;

в) $-163{,}84f^{20}h^{38}k^{34}m^{14}$;

г) $2c^{15}d^{15}g^{38}h^{37}p^{21}u^{32}w^{3}$.

К параграфу 1.6 Умножение одночленов и возведение одночлена в натуральную степень

1. а) Каким образом производится умножение одночлена на одночлен и как одночлен возводится в натуральную степень?

б) Чему равен коэффициент и степень одночлена, полученного умножением одного одночлена на другой?

в) Чему равен коэффициент и степень одночлена, полученного путём возведения данного одночлена в натуральную степень?

2. Найдите произведение одночленов:

а) $-8h^{23}m^{38}q^{28}p^{71}u^{40}w^{16}$ и $-2h^{37}m^{16}q^{3}p^{49}u^{25}w^{42}$;

б) $6a^{40}c^{23}e^{22}g^{19}k^{68}q^{19}t^{18}w^{3}$ и $w^{23}a^{45}c^{15}g^{4}q^{44}k^{43}t^{20}e^{10}$;

в) $2^{10}f^{46}h^{5}t^{45}u^{42}x^{43}$ и $\frac{1}{1\,024}F^{18}h^{46}t^{11}U^{46}x^{40}$;

г) $c^{26}g^{26}p^{10}r^{12}u^{18}$ и $a^{11}g^{10}n^{18}r^{22}m^{5}$.

3. Возведите одночлен в степень:

а) $(10k^{20}l^{22}m^{22}w^{21})^{3}$;

б) $\left(\frac{9}{7}g^{21}j^{25}q^{4}s^{15}\right)^{2}$;

в) $(-0{,}22h^{4}p^{26}v^{120})^{4}$;

г) $\left(-\frac{1}{2}a^{34}d^{30}f^{80}g^{6}q^{91}r^{64}s^{94}y^{29}\right)^{3}$.

4. Запишите в виде максимально возможной степени одночлена:

а) $\frac{128}{2187}b^{287}g^{224}$;

б) $\frac{15\,625}{117\,649}d^{192}e^{102}l^{264}t^{90}w^{288}z^{282}$;

в) $-\frac{16\,807}{100\,000}q^{100}y^{10}$;

г) $d^{279}l^{180}v^{441}w^{270}x^{153}$.

5. Запишите в виде одночлена стандартного вида:

а) $\left(-\frac{4}{5}l^{38}r^{44}\right)\cdot(l^{39}z^{7})\cdot\left(\frac{3}{5}r^{12}z^{19}\right)$;

б) $(0{,}1k^4l^4v^6)^3 \cdot (10k^5l^7v^9)^3$;

в) $\left(-\frac{3}{5}d^{21}p^{44}v^{20}\right)^4 \cdot \left(-\frac{25}{9}d^2p^{39}v^{24}\right)$;

г) $d^4 \cdot \left(\left((s^4)^2d^4\right)^3 f\right)^4 \cdot \left(\left((f^4)^2d^4\right)^3 s\right)^4$.

6. Некоторый одночлен является n-й степенью одночлена и m-й степенью одночлена. В каких случаях можно утверждать, что он является $n \cdot m$-й степенью одночлена? Обоснуйте свой ответ.

К параграфу 1.7 Деление одночлена на одночлен

1. а) Каким образом производится деление одночлена на одночлен?

б) Каковы условия, накладываемые на одночлены, при выполнении которых один одночлен можно поделить на другой?

в) Как связаны коэффициент и степень одночлена-частного с коэффициентами и степенями одночлена-делимого и одночлена-делителя?

2. Найдите частное одночленов:

а) $-5h^{33}k^{18}l^{42}p^{18}w^2$ и $-7h^8k^{13}l^2p^3w$;

б) $g^{20}h^{36}m^{29}c^{59}u^{21}x^{94}z^{74}$ и $-0{,}1u^{11}h^{35}z^{62}m^{10}x^{60}$;

в) $8b^{10}e^{18}g^{36}j^9c^{125}p^{24}u^7$ и $2pc^{115}b^6e^{17}u^4g^4$;

г) $-0{,}02e^{17}t^{22}u^{48}v^{58}$ и $0{,}0016e^3v^{36}u^{44}$.

3. Упростите выражение:

а) $\frac{u^{30}wy^{28}}{u^5y^4} \cdot 384u^{11}w^{21}y^{34}$;

в) $-9m^{24}s^{23}w^{13}z^{10} \cdot \frac{8m^{42}s^{50}u^{35}w^{47}z^{42}}{-2m^4z^{40}s^{45}w^{26}u^{28}}$;

б) $\frac{3c^{39}y^{36}}{4c^{26}y^{46} : y^{15}} \cdot \frac{4c^{55}y^{67}}{3c^{54}y^{90} : y^{70}}$;

г) $\left(-\frac{d^{42}j^2v^{30}}{4d^{27}j^2v^{29}}\right)^3\left(-\frac{24d^5j^{36}v^{40}}{-5d^2j^{33}v^{37}}\right)^3$.

4. Найдите такой одночлен A, для которого выполняется равенство:

а) $e^{10}m^{32}n^{33}r^{21}t^{38}v^{25}A = e^{27}m^{55}n^{54}r^{22}t^{76}v^{41}$;

б) $A\left(-\frac{1}{3}c^{31}h^3l^{45}n^{45}y^{47}\right) = \frac{7}{9}c^{32}h^{22}l^{48}n^{46}y^{48}$;

в) $-2b^{47}e^{46}g^{17}k^{9}x^{17}y^{14}zG = A3b^{44}e^{5}g^{17}x^{5}$;

г) $10c^{4}d^{34}g^{50}k^{35}t^{94}u^{35}w^{3} = -8c^{4}d^{34}k^{31}t^{34}uA$.

К параграфу 1.8 Подобные одночлены. Сложение и вычитание подобных одночленов

1. а) Какие одночлены называются подобными?

б) Что такое приведение подобных одночленов?

в) Что такое противоположный одночлен?

2. Приведите подобные члены:

а) $6a^{14}l^{41}p^{10}-33a^{14}l^{41}p^{10}+8a^{14}l^{41}p^{10}-29a^{14}l^{41}p^{10}$;

б) $43g^{9}h^{38}k^{29}p^{42}-32g^{9}h^{38}k^{29}p^{42}+39g^{9}h^{38}k^{29}p^{42}-26g^{9}h^{38}k^{29}p^{42}$;

в) $12b^{5}c^{2}z^{2}+7b^{5}c^{2}z^{2}-38b^{5}c^{2}z^{2}+28b^{5}c^{2}z^{2}+40b^{5}c^{2}z^{2}+50b^{5}c^{2}z^{2}$;

г) $2k^{44}t^{4}v^{2}y^{18}+25k^{44}t^{4}v^{2}y^{18}-10k^{44}t^{4}v^{2}y^{18}+14k^{44}t^{4}v^{2}y^{18}-32k^{44}t^{4}v^{2}y^{18}$.

3. При каких значениях m, n и p одночлены будут подобными:

а) $g^{m}x^{n}r^{19}$, $-10g^{m}x^{32}r^{p}$, $-3g^{31}x^{n}r^{p}$;

б) $-5h^{m}l^{n}c^{21}$, $4h^{m}l^{19}c^{p}$, $5h^{21}l^{n}c^{p}$;

в) $-6e^{m}y^{n}z^{13}$, $8e^{m}y^{3}z^{p}$, $-7e^{29}y^{n}z^{p}$;

г) $12b^{m}v^{n}z^{38}$, $91b^{m}v^{14}z^{p}$, $13b^{31}v^{n}z^{p}$?

4. Упростите выражение:

а) $\dfrac{-7a^{2}g^{24}u^{21}w^{28}z^{22}}{14ag^{24}w^{14}z^{2}}+\dfrac{7}{2}w^{14}au^{21}z^{20}$;

б) $\left(\dfrac{10p^{14}v^{25}w^{45}}{5p^{11}v^{22}w^{26}}\right)^{3}v^{11}w^{3}p-7\left(pv^{2}w^{6}\right)^{10}$;

в) $163d^{20}h^{10}s^{161}-\dfrac{\left(-6d^{8}h^{7}s^{65}\right)^{4}}{\left(2d^{4}h^{6}s^{33}\right)^{3}}$;

г) $w^{21}c^{6}\cdot\dfrac{7c^{29}s^{33}w^{20}}{3c^{22}s^{20}w^{5}}-\dfrac{28c^{27}s^{49}w^{49}:s^{23}}{21c^{14}s^{13}w^{13}}$.

К параграфу 2.1 Понятие многочлена, стандартный вид многочлена

1. а) Что такое многочлен?

б) Что такое степень многочлена?

в) Что такое стандартный вид многочлена?

г) Что такое нулевой многочлен?

2. Запишите в стандартном виде:

а) $2x\cdot 5y+6x\cdot\frac{1}{3}u^2+z\cdot 3k$;   в) $6x\cdot(5\cdot 6+33)j+x^3h^4\cdot 2p$;

б) $a^2y^2\cdot 2h-11t^4u-0{,}5\cdot p\cdot 2s$;   г) $-y^4s^4q^4\cdot 2-7\cdot 5j\cdot 3a\cdot g^4$.

3. Определите степень многочлена:

а) $-6b^{50}h^{26}-9r^{42}x^{45}-m^4r^{30}z^{21}$;

б) $6a^{16}m^6-5b^{16}r^{34}-5\,120x^{34}-9v^{47}z^{35}$;

в) $3j^{26}m^9y^3-7h^{26}s^{25}t^{37}-9j^{22}p^{31}y^{22}$;

г) $2s^{23}u^{12}+10b^{37}x^3+6j^2t^{34}-7g^{14}v^4$.

4. Найдите значение многочлена при заданных значениях букв:

а) $-7f^{16}m^{12}-96v^{26}-8v^5w^{22}$ при $f=-1$, $m=1$, $v=-1$, $w=1$.

б) $9+7u^3-2p^2u^3$ при $p=5$, $u=-3$.

5. Упростите выражение:

а) $-6h^2w+7wh^7(w^2)^2:h^2w^4h^3$;

б) $(3p^2u^2)^2t^7v^8z:(t^6v^7)-7(pu)^4tvz$;

в) $(2fk^3)^2(3m^5w^3)^3-(10f)^2(k^2w^3)^3m^{15}$;

г) $\frac{1}{2^{20}}\left((2g^2)^5\frac{1}{2}u^4\right)^7-2u^{14}\left((2g^5)^2\frac{1}{2}u^2\right)^7$.

К параграфу 2.2 Сумма и разность многочленов

1. Как найти сумму и разность двух многочленов?

2. Найдите алгебраическую сумму многочленов:

а) $(20b^4+108m^2-17m^4p)+(5b^4+198m^2-m^4p)-(-31b^4+9m^2-37m^4p)$;

б) $-(8+39h^4jy+33r^2y^4)-(-21-27h^4jy+12r^2y^4)+(-38h^4jy+12r^2y^4)$;

в) $(3a^4p^6+4b^7-14q^2p)+(31a^4p^6+8b^7+22q^2p)+(3a^4p^6-12b^7-5q^2p)$;

г) $(-27h+14h^4l^4-25v^5)-(-18h-38h^4l^4+19v^5)+(2h+25h^4l^4+13v^5)$.

3. Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях переменных:

а) $(30jl^4+21h^2v^3y^3+18v^2z^4)+(-30jl^4+6h^2v^3y^3-17v^2z^4)$

при $v=1$, $y=\dfrac{1}{3}$, $h=4$, $z=-2$;

б) $171s^2w^4+(11ab^3+891a^4f+23b^2l^4-171s^2w^4)-11ab^3$

при $a=\dfrac{1}{3}$, $f=\dfrac{21}{33}$, $b=0{,}25$, $l=2$.

4. Найдите такой многочлен A, для которого выполняется равенство:

а) $A+(28h^4j^2-12s+10a^2x+288px^4)=31h^4j^2-32a^2x-216px^4$;

б) $(-33c^4e^4k^2+30b^3f^3l^2v^4+6h^2l^2s^3w+33bu^3z)-A=30c^4e^4k^2+23h^2l^2s^3w+z^2$.

5. Что можно сказать о степени суммы и степени разности двух многочленов, если известно, что степень одного из них равна n, а степень другого m?

К параграфу 2.3 Произведение многочлена на одночлен

1. а) Как найти произведение одночлена на многочлен?

б) Что будет являться результатом умножения многочлена на одночлен?

в) Чему равна степень многочлена, полученного в результате умножения одночлена на многочлен?

2. Определите степень произведения, не выполняя умножения:

а) $b^3eg^3u^4(12a^2p^5-36e^2g^2s^4-2k^4t-40s^3t^2u^4)$;

б) $e^4g^3r^4(-34b^2c^4f+15m^8s^3p^2+32g^2j^3r^4)$;

в) $a^3k(54y-36-14d^3g^4+39u^3-5t^2z^4)$;

г) $c^{16}l^8(33d^4f-33a^{17}-30d^9j^5-38l^{20}m^3+37r^{14}x^{16}-18r^2z^{16})$.

3. Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $-4g^3u^{12}\left(\dfrac{14}{39}fr^5-\dfrac{32}{7}g^{15}-\dfrac{20}{13}r^7-\dfrac{3}{8}fs^{13}\right)$;

б) $\left(\frac{40}{9}m^{12}p^{8}-\frac{1}{7}j^{2}t^{4}-\frac{1}{11}g^{10}t^{13}-\frac{19}{8}e^{6}u^{5}\right)\cdot\frac{2}{13}m^{7}z^{11}$;

в) $\left(-\frac{7}{3}k^{10}p^{4}+\frac{3}{2}p^{5}-\frac{3}{2}m^{15}s^{13}+\frac{13}{16}s^{13}u^{6}\right)\cdot\frac{16}{3}h^{11}y^{15}$;

г) $-10u^{12}\left(\frac{4}{7}j^{12}l^{9}+\frac{13}{10}h^{10}m^{14}+\frac{11}{5}v^{13}-28t^{12}x^{15}\right)$.

4. Упростите выражение:

а) $(6j^{2}+16j^{15}z^{2}+37j^{4}z^{4})-j^{2}(6+16j^{13}z^{2})$;

б) $7u^{3}k^{10}+k(29u^{6}-5k^{2}-7k^{9})\cdot u^{3}+5u^{3}k^{3}$;

в) $s^{4}(14k^{6}-6-30k^{3}s^{3}-31k^{15}s^{11})-14k^{6}s^{4}+31k^{15}s^{15}$;

г) $a^{9}c^{7}r^{4}(6a^{5}+25a^{5}c^{3}r^{3}-37cr^{7}-3a^{2}c^{4}r^{11})-a^{9}c^{8}r^{7}(25a^{5}c^{2}-37r^{4}-3a^{2}c^{3}r^{8})$.

5. Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $t(8j^{4}+15j^{2}t^{2}+33j^{2}t^{3}+26t^{5})-t^{3}(15j^{2}+33j^{2}t+26t^{3})$

при $j=0{,}2$, $t=78{,}125$;

б) $-b^{2}p^{2}(31+33bx^{4}+23b^{2}x^{6})+b^{2}p^{2}(31+23b^{2}x^{6})$ при $b=-0{,}25$, $p=8$, $x=\frac{1}{3}$.

К параграфу 2.4 Произведение многочленов

1. а) Как найти произведение многочленов?

б) Что будет результатом умножения многочлена на многочлен?

в) Чему равна степень многочлена, полученного в результате умножения многочлена на многочлен?

г) Верно ли, что можно найти произведение любых двух многочленов?

2. Определите степень произведения, не выполняя умножения:

а) $(g^{7}h^{2}+g^{3}h^{3})(14g^{2}h^{2}-17h^{3}-11h^{12}-23g^{6}h^{12})$;

б) $(r^{3}w^{3}z+r^{3}w^{6}z^{4}+rw^{4}z^{7})(9r^{5}w^{6}-37r^{3}w^{2}z+26wz^{4}-23r^{5}w^{3}z^{7})$;

в) $(5k^{6}m^{3}y^{2}+4k^{5}m^{4}y^{5})(-34k^{7}m^{5}y^{2}+11k^{5}my^{4}+14k^{2}m^{5}y^{5}+7k^{3}y^{7})$;

г) $(37e^{5}j^{2}s^{5}+39e^{5}j^{3}s^{5}-37e^{3}j^{3}s^{6})(26cp+12b^{7}cp+31b^{3}c^{2}p^{6})$.

3. Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $(-18j^4s^2 - 13j^6s^5)(-3j^4s^3 - 10j^2s^7)$;

б) $(a^2 + 18ab + a)(18b^2 - 2b - 11ab)$;

в) $(13 + 18t + 11t^2)(2 + t)$;

г) $(4f^2 - 3p^2)(2fp - 20)$.

4. Упростите выражение:

а) $2p(7-5p^2)-\dfrac{14}{23}p(23+138p^2)$;

б) $(5-18r-15r^2)(r-1)-(r+10)(3r-7+9r^2)$;

в) $\left(\dfrac{317}{552}-\dfrac{105u}{184}\right)(6+5u-14u^2)-\left(\dfrac{225}{184}-\dfrac{245u}{276}\right)(2+u-9u^2)$;

г) $(15t^3+17t^4-17t^5)\left(t+\dfrac{1}{15}\right)-\left(t-\dfrac{7}{15}\right)(7t^4-19t^5)$.

5. Убедитесь, что при любых значениях переменных значение выражения одно и то же:

а) $(5d+7)(3d+7)-\left(\dfrac{15}{8}d+2\right)\left(8d+\dfrac{64}{3}\right)$;

б) $(32-6z^3+z^6)(1-z)+(z^6-16z-8z^4)(z-1)+2(z-1)(16+8z-3z^3+4z^4)$.

6. Упростите выражение, воспользовавшись предварительно указанной заменой:

а) $(5+f^2+f^3)\left(2+\dfrac{3}{2}f^2+\dfrac{3}{2}f^3\right)-\left(2+\dfrac{f^2}{2}+\dfrac{f^3}{2}\right)(5+3f^2+3f^3)$,

замена $f^3 + f^2 = 2a - 2$;

б) $\left(\dfrac{3}{2}+5x-x^2\right)(x^2-5x)(2-5x+x^2)+(x^2-1-5x)(x^2-5x)(3-5x+x^2)$,

замена $w = x^2 - 5x$.

К параграфу 2.5 Деление многочлена на одночлен

1. а) Как произвести деление многочлена на одночлен?

б) Что будет результатом деления многочлена на одночлен?

в) Чему равна степень многочлена, полученного в результате деления многочлена на одночлен?

г) В каких случаях деление возможно?

2. Выполните деление:

а) $(2f^3hp-11f^2h^2p-6f^3h^3p-12f^4h^5p+2hf^2p^5):f^2hp$;

б) $(15e^7p^8-11e^9p^2-10e^{10}p^4-10e^6p^7-19e^{11}p^7):e^6p^2$;

в) $(15p^{12}t^5v^5-3p^7t^5v^7+p^{11}t^6v^7+4p^{10}t^5v^{10}+p^{12}t^7v^{11}):p^7t^5v^5$;

г) $(10c^{10}r^4x^9-20c^{12}r^5x^6-14c^{11}r^6x^9+6c^7r^2x^{12}):(-2c^7r^2x^6)$.

3. Запишите в виде произведения одночлена на многочлен:

а) $3a^9e^4j^7-10a^{12}e^7j^3-10a^6e^4j^5$;

б) $10a^6j^9+14a^5j^6v^4+20a^5j^7v^4$;

в) $8b^5e^5+11b^7e^3r^3+2b^8e^3r^5$;

г) $q^8pu^3-8q^5p^5u^4-16q^2pu^5$.

4. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $3d^6k^9t^5v^8-8d^3k^7t^8v^5-11d^6k^6t^6v^{11}$;

б) $17m^5t^9u^2v^5-6mt^5u^3v-5mt^9u^2v^2-m^3t^9u^4v^4$;

в) $15a^6q^5t^6x^7-7a^5q^6t^5x^6-12q^5t^{11}x^6-13a^4q^7t^6x^9-17q^4t^{11}x^{10}$;

г) $12j^{12}y^2-2j^{10}k^4y^5-2j^{10}y^7-2j^{15}y^7-12j^{11}k^2y^7$.

5. Убедитесь, что сумма k последовательных натуральных степеней натурального числа q делится на $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{k-1}$. Составьте таблицу таких делителей для чисел $q=2, 3, 4, \ldots$ и $k=1, 2, 3, 4$.

К параграфу 3.1 Квадрат суммы и квадрат разности

1. а) Что такое квадрат суммы и квадрат разности?

б) Запишите формулы для квадрата суммы и квадрата разности.

2. Вычислите, применив формулу квадрата суммы или квадрата разности:

а) 201^2; б) 199^2; в) $14{,}01^2$; г) $13{,}99^2$.

3. С помощью формулы квадрата суммы или квадрата разности преобразуйте в многочлен:

а) $(0{,}15s^{13}w^2-0{,}22q^{11}r^3)^2$;

б) $\left(\dfrac{2}{3}x^4+\dfrac{4}{5}yz^3\right)^2$;

в) $((2a+3b)^2+(4a-b)^2)^2$;

г) $\left(((i+j)^2+(i-j)^2)^2-((i+j)^2-(i-j)^2)^2\right)^2$.

4. Запишите многочлен в виде квадрата суммы или квадрата разности:

а) $\frac{9}{4}f^4 + \frac{21}{11}f^2g^4 + \frac{49}{121}g^8$;

б) $49i^6p^4 - 112i^3q^2p^5 + 64q^4p^6$;

в) $0{,}0484u^2 + 0{,}0484uv + 0{,}0121v^2$;

г) $\frac{25}{49}d^4g^8 - \frac{6}{7}d^2g^4j^4s^8w^7 + \frac{9}{25}j^8s^{16}w^{14}$.

5. Запишите в виде квадрата:

а) $a^2 + 4ab + 4b^2 + 6ac + 12bc + 9c^2$;

б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 36z^2 + 6xz - 4yz - \frac{xy}{3}$;

в) $25t^4u^4 - 20k^7t^2u^6 + 4k^{14}u^8 - 10m^2t^2u^2w^2 + 4k^7m^2u^4w^2 + m^4w^4$;

г) $1 + 4u + 6u^2 + 4u^3 + u^4$.

6. Как устроена формула квадрата суммы n чисел?

К параграфу 3.2 Выделение полного квадрата

1. а) Что такое полный квадрат?

б) Каким образом производят выделение полного квадрата?

2. Выделите полный квадрат:

а) $31 - 140u + 175u^2$;

б) $\frac{u^2}{21} + \frac{u}{5}$;

в) $\frac{168u}{5} + \frac{196u^2}{75}$;

г) $\frac{3u^2}{16} - \frac{134}{75} - \frac{2u}{5}$;

д) $\frac{7u^2}{80} - \frac{21u}{20} + \frac{83}{20}$;

е) $0{,}03u^2 + 0{,}162u$.

3. Убедитесь, что выражение сохраняет знак при всех значениях переменной:

а) $\frac{27x^2}{7} - \frac{3x}{2} + \frac{583}{48}$;

б) $14x - \frac{55}{3} - 3x^2$.

4. Найдите наименьшее значение выражения. При каких значениях переменных выражение принимает наименьшее значение:

а) $\frac{3x^2}{5} - \frac{6x}{5} + \frac{8y^2}{7} + \frac{16y}{7} + \frac{236}{35}$;

б) $\frac{41}{5} - 8x + 5x^2$;

в) $2x^2 + 3y^2 + 4x + 3$;

г) $\frac{51}{7} + 2x + \frac{x^2}{2} - 6y + 7y^2 + 8z + 8z^2$?

К параграфу 3.3 Куб суммы и куб разности

1. а) Что такое куб суммы и куб разности?

б) Запишите формулы для куба суммы и куба разности.

2. Вычислите, применив формулу куба суммы или куба разности:

а) 31^3; б) 29^3; в) $11{,}1^3$; г) $10{,}9^3$.

3. С помощью формулы куба суммы или куба разности преобразуйте в многочлен:

а) $\left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^3$; г) $\left((i+j)^3 - (i-j)^3\right)^3$;

б) $(2a - 3b^2)^3$; д) $\left((2r+3R)^3 + (2r-3R)^3\right)^3$;

в) $(p^4w^2 + t^7s^3)^3$; е) $(0{,}4m - 0{,}7n)^3$.

4. Выпишите формулы для 2, 3, 4, 5-й степеней суммы $a + b$. Проследите за изменением коэффициентов и степеней одночленов, входящих в эти выражения. Попробуйте увидеть простую зависимость и написать по аналогии формулы для 6, 7, 8-й степеней суммы $a + b$.

К параграфу 3.4 Разность квадратов

1. а) Что такое разность квадратов?

б) Запишите формулу для разности квадратов.

2. Вычислите, применив формулу разности квадратов:

а) $120 \cdot 122$; б) $(-13{,}5)\cdot(-13)$; в) $987^2 - 977^2$; г) $2\,222^2 - 888^2$.

3. Убедитесь, что:

а) $78^2 - 45^2$ делится на 11 и 3;

б) $227^2 - 181^2$ делится на 23 и 2;

в) $677^2 - 323^2$ делится на 1 000.

4. Представьте в виде произведения:

а) $(14c^4 - 14c^4y^6)^2 - (-17c^4 - 16c^4y^6)^2$; б) $(5z^6 - 6z^4)^2 - (11z^4 + 19z^6)^2$;

в) $(16j^6-5)^2-(2+11j^6)^2$;

г) $(7d^5+4dz^3)^2-(11d^5-4dz^3)^2$.

5. Упростите произведения, применяя формулу разности квадратов:

а) $(2s-11t)(2s+11t)$;

б) $\left(\dfrac{x+a}{y+b}+\dfrac{y+c}{x+d}\right)\left(\dfrac{x+a}{y+b}-\dfrac{y+c}{x+d}\right)$;

в) $\left(7a+8\dfrac{b}{a}\right)\left(7a-8\dfrac{b}{a}\right)$;

г) $(n^2-m^2)(n^2+m^2)(n^4+m^4)$;

д) $(1-x)(1+x)(1+x^2)$;

е) $(p+1{,}5)(p-1{,}5)(p^2+2{,}25)$.

6. Упростите произведения, применяя разные формулы:

а) $(7f-9g)(7f+9g)(49f^2+81g^2)$;

б) $(v-u)(u^2+v^2)(u^8+v^8)(v^{32}+u^{32})(u^{16}+v^{16})(v^4+u^4)(u+v)$;

в) $\left((a+b)^3+(a-b)^3\right)\left((a+b)^3-(a-b)^3\right)$;

г) $\left(\left((k+1)^2+(k-1)^2\right)^3+\left((k+1)^2-(k-1)^2\right)^3\right)\cdot$
$\cdot\left(\left((k+1)^2+(k-1)^2\right)^3-\left((k+1)^2-(k-1)^2\right)^3\right)$.

7. Сравните ($>$, $<$, $=$):

а) 112^2 и $111\cdot 113$;

б) $(-3{,}999)\,(-4{,}001)$ и 4^2.

8. Разложите на множители, выделив сначала полный квадрат:

а) $x^2+3x-54$;

б) $5x^2-18x-35$.

К параграфу 3.5 Разность кубов и сумма кубов

1. а) Что такое сумма кубов и разность кубов?

б) Запишите формулы для суммы кубов и разности кубов.

в) Что такое неполный квадрат суммы и неполный квадрат разности?

2. Убедитесь, что:

а) 87^3-79^3 делится на 8;

б) 123^3+321^3 делится на 444;

в) 23^3-18^3 делится на 1 267;

г) 49^3+37^3 делится на 1 957.

3. Представьте в виде произведения:

а) $8c^6m^6p^{18} - 64m^{12}p^3$;

б) $-a^{15}t^{15} - 64a^9t^9$;

в) $\frac{8}{125}r^{18}y^6 - \frac{1}{27}r^9y^3$;

г) $(7n + 8m)^3 + (8n - 7m)^3$;

д) $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4}y^2\right)^3 - \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}y^2\right)^3$;

е) $(2a^9j^6 + a^{15}j^{12})^3 + (a^9j^{18} - 2a^9j^3)^3$.

4. Запишите произведение в виде многочлена:

а) $(a^5 + f^2)(a^{10} - a^5f^2 + f^4)$;

б) $(2k - 3rv^3)(4k^2 + 6krv^3 + 9r^2v^6)$;

в) $(w^4y^3 - 2)(4 + 2w^4y^3 + w^8y^6)$;

г) $(4d^3 + 5g^4z)(16d^6 - 20d^3g^4z + 25g^8z^2)$.

5. Упростите произведения, применяя несколько формул сокращённого умножения:

а) $(8h^2k^3 - 1)(1 + 8h^2k^3)(1 - 8h^2k^3 + 64h^4k^6)(1 + 8h^2k^3 + 64h^4k^6)$;

б) $h^8s^{16}z^8(hs^2 - z^4)(hs^2 + z^4)(h^2s^4 + z^8)(h^4s^8 + z^{16})$;

в) $(x - 1)(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2)(1 - x^3 + x^6)(1 + x^3 + x^6)$;

г) $b^{36}p^{108}(1 + p^4v^8)^3(1 - p^4v^8 + p^8v^{16})^3(1 - p^{12}v^{24} + p^{24}v^{48})^3$.

К параграфу 3.6 Разложение многочлена на множители

1. Расскажите, в чём заключается метод разложения на множители:

а) с помощью вынесения за скобки общего множителя;

б) с помощью формул сокращённого умножения;

в) с помощью группировки;

г) с помощью группировки с предварительным образованием дополнительных слагаемых.

2. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $14a^3j^2p^5s^5y^2 - 44a^3jp^5s^5y^2 + 24a^5j^4p^5s^5y^2 + 18a^3j^6p^5s^5y^2$;

б) $72a^3c^3d^6fj - 24a^3c^3d^6fj^2 + 9a^5c^3d^6fj^4 + 18a^3c^3d^6fj^6$.

3. Разложите на множители, применяя формулы сокращённого умножения:

а) $25s^{10}t^2w^2 + 30s^6t^4w^3 + 9s^2t^6w^4$;

б) $25g^8u^6 - 40g^6u^6z^6 + 16g^4u^6z^{12}$;

в) $125t^{12}y^9 - 75t^{13}y^{13} + 15t^{14}y^{17} - t^{15}y^{21}$;

г) $27f^9r^3 + 135f^{16}r^7 + 225f^{23}r^{11} + 125f^{30}r^{15}$;

д) $64h^{12}j^3 + 8h^{12}j^{15}$;

е) $-25k^2t^4 + k^{10}p^{12}t^4$;

ж) $27y^6 - 64f^9s^{18}y^6$;

з) $x^{12} - 1$.

4. Разложите на множители, применяя группировку слагаемых:

а) $-j - m + jm + m^2 - p + jp + 2mp + p^2$;

б) $6x + 6x^2 + 2xy + 2x^2y + 3xz + 3x^2z + xyz + x^2yz$;

в) $4x - 6 - 12h + 8hx$;

г) $6x^2y^3 + 2x^3y^4 + 3x^3y^5 + x^4y^6$.

5. Разложите на множители, применяя разные методы:

а) $-x^2y + xy^3 + x^3z + x^2yz - xy^2z - y^3z - x^2z^2 + y^2z^2$;

б) $x^9 + x^6 + x^3 + 1$;

в) $P^4 + Q^4 + R^4 - 2(P^2Q^2 + P^2R^2 + Q^2R^2)$;

г) $36 - 60x + 37x^2 - 10x^3 + x^4$;

д) $a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2c + abc$.

К параграфу 3.7 Понятие о тождествах и методах их доказательства

1. а) Что такое целое алгебраическое выражение?

б) Что такое тождество?

в) Что такое тождественное преобразование?

г) Что такое тождество с условием?

2. Упростите выражение, сведя его к многочлену стандартного вида:

а) $(u + v + y)^3 - 2y^3 - (u + v - y)^3 - 6y(u^2 + v^2)$;

б) $(2i + y + l)(2i + y - l) + (5i + 4y + l)(5i + 5y - l) - (3i + 4y)^2 - l(y - 2l)$;

в) $(s + n + k + l)(s + n - k - l) - (s + n + k)(s + n - k) - (s + n)(s - n) + 2kl$;

г) $5x^2 + x - 4 + x(x - 1)(x + 1) + (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

3. Докажите тождество:

а) $(a+b+c)^4+(b+c-a)^4+(c+a-b)^4+(a+b-c)^4=$

$=4(a^4+b^4+c^4)+24(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$;

б) $((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)^2=2((x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4)$;

в) $(i+j+k)^3-(i+j-k)^3-(i-j+k)^3-(-i+j+k)^3=24ijk$.

4. Докажите, что если $u+v+w=0$, то
$5(u^3+v^3+w^3)(u^2+v^2+w^2)=6(u^5+v^5+w^5)$.

К параграфу 4.1 Уравнение с одним неизвестным и его корни

1. Решите уравнение:

а) $x=5x$;

б) $(x-3)=5(x-3)$;

в) $x^2=5x$;

г) $(x-3)^2=5(x-3)$.

2. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x-1}{5}=-\dfrac{7}{10}$;

б) $\dfrac{x+3}{10}=\dfrac{1}{5}$;

в) $\dfrac{10x-1}{2}=3$;

г) $\dfrac{3x-1}{5}=13$;

д) $\dfrac{2x+3}{10}=\dfrac{x}{5}$;

е) $\dfrac{2x+3}{7}=\dfrac{4x+6}{14}$;

ж) $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{3x-5}{4}$;

з) $\dfrac{2x+8}{5}=\dfrac{x-7}{8}$.

К параграфу 4.2. Линейные уравнения с одним неизвестным

1. Решите линейные уравнения:

а) $-x+7=0$;

б) $-2x-9=0$;

в) $12x+30=0$;

г) $-5{,}3x=0$;

д) $4{,}8x+2{,}4=0$;

е) $1{,}5x-2{,}25=0$;

ж) $43x-8{,}6=0$;

з) $0{,}003x+9=0$.

2. Решите уравнение:

а) $2\frac{2}{3}x-32=0$;

б) $-\frac{2}{7}x+\frac{11}{21}=0$;

в) $4\frac{1}{7}x+29=0$;

г) $\frac{1}{6}x-3\frac{3}{8}=0$.

3. При каких значениях a уравнение не имеет корней:

а) $ax-1=0$;

б) $7x-3a=0$;

в) $(a-2)x+a=0$;

г) $ax+a+1=0$?

4. При каких значениях c уравнение имеет бесконечное количество корней:

а) $cx+9=0$;

б) $3x+c+1=0$;

в) $cx+2c=0$;

г) $(2c-4)x+3c-6=0$?

К параграфу 4.3 Методы решения уравнений

1. Решите уравнение:

а) $2(3x-1)-3x=2x+7$;

б) $3(2x-4)+3x=9x-3$;

в) $2(3x+4)-6x=5-2x$;

г) $9(x+1)-6x=5(x+3)$;

д) $3(2x-1)+x+3=7x$;

е) $3(7x-1)-7x+1=8x$;

ж) $3(x+2)+12(3-x)=2x-1$;

з) $4(2x-5)-10(x-2)=4(x+3)$.

2. При каких значениях x верны равенства:

а) $\frac{7x+4}{5}-\frac{3x-5}{2}=x$;

б) $\frac{2x-5}{3}-\frac{3x-2}{5}=3-x$;

в) $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{12}=\frac{x+1}{4}$;

г) $\frac{x-3}{8}+\frac{x+9}{12}=\frac{3x+67}{20}$?

3. Решите уравнение:

а) $(3x-1)(6x-1)=(6x+5)(3x+17)$;

б) $(4x-1)(x+2)=(x-2)(4x-1)$;

в) $(3x+5)(5x-7)=3(5x+3)(x-1)$;

г) $(6x-1)(16x+7)=8(4x+3)(3x+2)$.

4. При каких значениях x значения выражений равны:

а) $3x + 3$ и $5x - 12$;

б) $48 - 16x$ и $2x + 3$;

в) $3x - 100$ и $40 - 7x$;

г) $4x - 15$ и $47 - 6x$?

5. Решите уравнение:

а) $|x| = x$;

б) $|x| = 5x$;

в) $|x| = x - 3$;

г) $|x| = 5x - 4$.

6. Известно, что $x = 2$ – корень уравнения $5(a + 3x)(x + 1) - 4(1 + 2x)^2 = 80$. При каком a это возможно?

К параграфу 4.4 Задачи на составление уравнений

1. В двух пакетах лежит поровну конфет. Если из первого пакета вынуть 25 конфет, а из второго 10, то в первом пакете останется в два раза меньше конфет, чем во втором. Сколько конфет в каждом пакете?

2. Среднее арифметическое двух чисел равно 10,01. Найдите эти числа, если одно из них в 5,5 раз больше другого.

3. Сумма двух натуральных чисел равна 495. Известно, что одно из них заканчивается нулём, и если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найдите эти числа.

4. Сумма трёх чисел равна 136,5. Если первое число умножить на 8, второе на 4, третье на 6, то полученные произведения будут равны. Найдите эти числа.

5. В двух сосудах находится по 540 л воды. Из первого сосуда вытекает 25 л в минуту, а из второго 15 л в минуту. Через какое время во втором сосуде останется воды в 6 раз больше, чем в первом?

6. Двое рабочих выполнили заказ за 9 дней, работая поочерёдно. Сколько дней работал каждый, если известно, что первый рабочий, работая один, может выполнить заказ за 6 дней, а второй за 15 дней?

7. Шестизначное число оканчивается цифрой 2. Цифру 2 переставили в начало числа и получили число в 3 раза меньше первоначального. Найдите первоначальное число.

8. Сплав меди с оловом массой 12 кг содержит 45% меди. Сколько олова нужно добавить к нему, чтобы содержание меди стало 40%?

9. Найдите несколько последовательных чисел, сумма которых равна 383. Сколько решений имеет задача?

10. Бак наполняется двумя трубами, причём через первую трубу бак можно наполнить в два раза быстрее, чем через вторую трубу. За сколько времени наполнит бак каждая труба отдельно, если при одновременном действии обеих труб бак наполняется за 8 часов?

11. На одном складе 185 т угля, на другом 237 т. С первого склада ежедневно продавали по 15 т угля, а со второго по 18 т. Через какое время на втором складе окажется угля в полтора раза больше, чем на первом?

12. Турист за два дня проехал на велосипеде $\frac{2}{3}$ маршрута. В первый день он проехал 20% маршрута и ещё 20 км, а во второй 25% остатка и ещё 45 км. Какова длина маршрута?

К параграфу 5.1 Линейное уравнение с двумя неизвестными

1. Проверьте, является ли пара чисел (3; 1) решением данного уравнения:

а) $x + y = 4$;
б) $4x - 7y = 6$;
в) $x = 3y$;
г) $-4x + 13y = 1$.

2. Найдите три решения уравнения:

а) $x - 2y = 3$;
б) $0 \cdot x - 2y = 3$;
в) $x + 2y = 3$;
г) $x + 0 \cdot y = 3$.

3. Может ли решением данного уравнения быть пара положительных чисел:

а) $x + 5y = 3$;

б) $2x - 5y = 7$;

в) $2x + 4y = -12$;

г) $2x + 3y = 0$?

4. При каком значении a пара чисел $x = a - 1$ и $y = 2a - 1$ будет решением уравнения $x + 2y = 5$?

5. Найдите все такие решения уравнения $3x - y = 6$, что значения переменных x и y отличаются на 1.

К параграфу 5.2 График линейного уравнения с двумя неизвестными

1. Принадлежат ли графику уравнения $x + 5y = -8$ точки:

а) $(2; -2)$;

б) $(-2; 2)$;

в) $(-8; 0)$;

г) $(0; -8)$.

2. Постройте график уравнения:

а) $x = 5$;

б) $x - 2y = 0$;

в) $x - y + 2 = 0$;

г) $(x - 5)(x - 2y) = 0$;

д) $(x - 2y - 6)(x - 2y) = 0$;

е) $x^2 - 25 = 0$;

ж) $x^2 - 4y^2 = 0$;

з) $x^2 + y^2 = 0$.

3. Постройте график уравнения:

а) $x - y = 0$;

б) $|x| - y = 0$;

в) $x - |y| = 0$;

г) $|x| - |y| = 0$.

4. В каких точках график уравнения $(x - 5)(y + 1) = 0$ пересекает:

а) ось абсцисс;

б) ось ординат?

5. В каких координатных четвертях проходит график уравнения $2x + 4y = 5$?

6. Постройте график уравнения:

а) $\dfrac{x+2y}{x+y} = 1$;

б) $\dfrac{x-y+6}{x-2y} = 1$.

7. Найдите коэффициенты a и b, если график уравнения $ax + by = 1$ проходит через данные точки:

а) $A(8; -3)$ и $B(-12; 5)$;

б) $M(-1; 1)$ и $N(-12; 5)$.

К параграфу 5.3 Система уравнений с двумя неизвестными. Графический метод решения систем

1. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x - y = 0, \\ 3x - y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$

2. В какой координатной четверти пересекаются графики уравнений $3x + 4y = 11$ и $x - 2y = 15$?

3. При каких значениях a графики уравнений $x + y = a$ и $3x + y = 6$ пересекаются:

а) на оси абсцисс;

б) на оси ординат?

4. При каком значении a графики уравнений $2x - y = 5$, $3x - 2y = 3$, $ax + y = 16$ пересекаются в одной точке?

5. При каких значениях a графики уравнений параллельны:

а) $x + y = 4$ и $ax + 2y = 6$;

б) $2x + y = 3$ и $ax + 2y = 6$?

К параграфу 5.4 К параграфу 5.5 Решение систем уравнений методом подстановки. Метод сложения

1. Выразите одно неизвестное через другое в уравнении:

а) $x - 3y = -6$;

б) $3x + y = 4$;

в) $2x + 3y = 6$;

г) $2x + 5y = 5$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ x-y=6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 9y-7x=1, \\ 3x+4y=31; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 5x+4y=13; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4x+3y=11, \\ 2x-y=13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+y=9, \\ 2x-3y=6; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 5x-3y=14, \\ 2x+y=10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x+8y=-1, \\ x+2y=4; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 9y+11x=7, \\ 10x-7y=27. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}, \\ \dfrac{y}{7}=\dfrac{x+2}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}=\dfrac{5-y}{6}, \\ \dfrac{y}{2}=x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+4}{4}, \\ \dfrac{y}{2}=\dfrac{3-x}{6}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{y-9}{4}=\dfrac{x+1}{3}, \\ \dfrac{3+x}{4}=\dfrac{y-11}{3}. \end{cases}$

4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x-y)=4, \\ \dfrac{1}{4}(x+y)=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}(2x+y-1)=1, \\ \dfrac{2}{3}(2y-x+1)=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(5y-x)=5, \\ \dfrac{1}{5}(14y+x)=16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{5}(x+y-1)=1, \\ \dfrac{1}{3}(y-x+1)=2. \end{cases}$

5. Известно, что пара $(-2; 1)$ является решением уравнения $ax+5y=7$. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=a, \\ ax+3y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+ay=2, \\ ax+3y=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} ax+y=4, \\ y+ay=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} ax+y=3, \\ x+ay=a. \end{cases}$

6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 3x, \\ 2x + 3y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5xy = 2y, \\ 15x + 8y = 30; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 2y, \\ 3x + 2y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5xy = 7x, \\ 9x - 10y = -17. \end{cases}$

7. При каких значениях a и b система уравнений имеет решение $(1; -1)$:

а) $\begin{cases} ax + 3y = 5, \\ 5x + by = -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y = a, \\ bx + 4y = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a(2x + 3y) = a, \\ x - by = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} a(2x + 3y) = b(2x - 3y), \\ x - 2y = 3? \end{cases}$

8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x} = 7, \\ \dfrac{4}{x+y} - \dfrac{1}{x} = 1. \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y} + \dfrac{3}{x-y} = 3, \\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{y}{y+3} = 1, \\ \dfrac{x}{x-2} + \dfrac{3y}{y+3} = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x}{x-y} + 2x = 5, \\ \dfrac{2x}{x-y} - x = 2. \end{cases}$

9. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 9x + 11y = 28; \\ 11x + 9y = 22. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8\,359x + 1\,641y = 28\,359; \\ 1\,641x + 8\,359y = 21\,641. \end{cases}$

1. В хозяйстве есть куры и овцы. Сколько тех и других, если у всех вместе 19 голов и 46 ног?

2. В кошельке 27 двухрублёвых и пятирублёвых монет на сумму 99 рублей. Найдите количество монет каждого вида.

3. За время экскурсии 15 семиклассников съели 40 булочек, причём каждая девочка съела 2 булочки, а каждый мальчик 3. Сколько девочек и сколько мальчиков участвовало в экскурсии?

4. Даны два числа. Если к первому числу прибавить половину второго, то получится 65, а если из второго числа вычесть третью часть первого, то получится первое число. Найдите эти числа.

5. В доме 36 квартир, часть из них – двухкомнатные, остальные – трёхкомнатные. Известно, что комнат в доме – 88. Сколько квартир каждого типа в этом доме?

6. Сумма двух чисел равна 527. Найдите числа, если известно, что 8% первого числа равны 7,5% второго?

7. Среднее арифметическое двух чисел равно 36, а 20% их разности равно 8. Найдите эти числа.

8. На складе имеются упаковки гвоздей весом 3 кг и 4 кг. Кладовщику требуется отпустить 10 кг гвоздей. Может ли он это сделать, не вскрывая упаковок?

9. Букинистический магазин купил две книги на сумму 360 руб., затем продал их, получив 25% прибыли. За сколько была куплена каждая книга, если за первую была получена прибыль 50%, а за вторую 12,5%?

10. Найдите двузначное число, сумма цифр которого равна 12, а разность числа единиц и числа десятков в этом числе в 12 раз меньше самого числа.

11. Сумма цифр трёхзначного числа равна 21. Если в этом числе переставить цифру сотен с цифрой десятков, то число уменьшится на 180, а если переставить цифру десятков с цифрой единиц, то число увеличится на 36. Найдите это трёхзначное число.

12. Теплоход, скорость которого в стоячей воде равна 23 км/ч, шёл 2 ч 24 мин по течению реки и 1 ч 36 мин против течения. За всё это время теплоход прошёл 93,4 км. Найдите скорость течения реки.

13. Моторная лодка шла 40 минут по течению реки и 1 час против течения и за всё это время прошла 37 км. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 1,5 км/ч.

14. Один из поездов проходит расстояние между городами за 2 ч 48 мин, а другой – за 4 ч 40 мин. Найдите расстояние между городами, если скорость первого поезда на 26 км/ч больше скорости второго.

15. Поезд за 15 секунд проходит мимо телеграфного столба, а за 50 секунд – мост длиной 700 метров. Найдите скорость движения поезда и длину моста.

16. Найдите скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 секунд и затратил 25 секунд на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

17. Мне сейчас вдвое больше лет, чем вам было тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Нам обоим сейчас 63 года. Сколько лет каждому из нас?

18. Доход семьи состоит из зарплаты мужа, зарплаты жены и стипендии дочери. Если бы зарплата мужа увеличилась на 50%, то доход семьи увеличился бы на 30%. Если бы зарплата жены увеличилась на 50%, то доход семьи увеличился бы на 15%. На сколько процентов увеличился бы доход семьи, если бы стипендия дочери увеличилась на 50%?

К параграфу 1.1

1. а) −6,2; в) 0; е) 3391,3; з) 1.

2. а) $a+b$; в) $\frac{c+d}{4}$; д) $3k-\frac{1}{2}s$.

3. а) 1; в) 11; е) −13,24; з) −3,026.

4. а) $-\frac{5}{3}$; в) 8; е) −14,5; з) 1.

5.

a	2	4	−1	−1,6	7,12	−119
$3a-1$	5	11	−4	−5,8	20,36	−358

6.

s	−2	0	2	−12,5	3,3	19
$3s+7$	1	7	13	−30,5	16,9	64

7.

x	2	4	−3	$\frac{1}{3}$	$\frac{23}{7}$	2,13
y	3	−1	−2	−0,5	$-\frac{69}{14}$	13,2
$3x+2y$	12	10	−13	0	0	32,79

8.

m	0,5	0,45	7	−5	$\frac{1}{5}$	−1,17
n	0,7	0,23	5	−7	$-\frac{3}{25}$	0,002
$7m-5n$	0	2	24	0	2	−8,2

9. а) $q=-2$; в) $x=\frac{2}{3}$; е) $x=-2$; з) $x=13$.

10. а) $y = 8$; в) $z = \frac{7}{19}$; е) $x = 3$; з) $a = -\frac{9}{2}$.

11. а) При любых; в) $x \neq 0$; е) при любых; з) при $s \neq 1$ и $s \neq -2$.

12. а) $3x - 2y + 2m - 5$; $3x - 2y - 2m + 5$; $(3x - 2y) \cdot (2m - 5)$; $\frac{3x-2y}{2m-5}$;

в) $4v + 7d - 7y$; $4v - 7d + 7y$; $4v(7d - 7y)$; $\frac{4v}{7d-7y}$;

е) $10x + 4y + 10v - 30$; $10x + 4y - 10v + 30$; $(10x + 4y) \cdot (10v - 30)$; $\frac{10x+4y}{10v-30}$;

з) $8j + 10y - 14x + 9z$; $8j + 10y + 14x - 9z$; $(8j + 10y) \cdot (9z - 14x)$; $\frac{8j+10y}{9z-14x}$.

13. а) $n \cdot x$; в) $60w$ п; е) $s \cdot s \cdot s = s^3$; з) $60 \cdot 60 \cdot v = 3\,600v$ м.

14. а) $2x + 3y$ км; в) $(a \cdot g)^2 - a^2$.

15. а) $(A \cdot a)\,(b \cdot B) - a \cdot b$ м^2; в) $\frac{5}{w} + \frac{5}{2w} + \frac{5}{2w+1}$ ч.

16. а) Пусть v км/ч – скорость течения реки, тогда искомое время равно $\frac{5}{6-v} + 2 + \frac{5}{6+v}$ ч.

б) Пусть V м^3 – объём бассейна, а x м^3/мин – производительность второй трубы. Тогда бассейн заполнится за $\frac{V}{25+x}$ мин.

в) Пусть первоначальные длина и ширина участка соответственно a м и b м. Тогда его площадь увеличится в $\frac{(a+2)(b+2)}{ab}$ раз или увеличится на $(a + 2)(b + 2) - ab$ м^2.

17. В одном килограмме первого сплава 1 часть олова и k частей меди. Тогда всего частей $k + 1$, масса одной части составляет $\frac{1}{k+1}$ кг, а масса меди составляет $\frac{k}{k+1}$ кг. Аналогично, в 1 кг второго сплава $\frac{n}{n+1}$ кг меди, а масса меди в новом сплаве $\frac{k}{k+1} + \frac{n}{n+1}$ кг.

18. а) Пусть карандаш стоит k руб., а ластик l руб., тогда стоимость покупки составляет $4k + 6l$ руб.; в) пусть m учеников получили оценку «5» и n получили оценку «4», тогда средний балл равен $\frac{5m+4n}{m+n}$.

19. То же самое.

К параграфу 1.2

1. а) 12^4, основание 12, показатель степени 4; в) $(-87)^2$, основание -87, показатель степени 2; е) $(-29)^5$, основание 29, показатель степени 5; з) $(-3)^3$, основание -3, показатель степени 3.

2. а) $\left(\frac{3}{7}\right)^5$, основание $\frac{3}{7}$, показатель степени 5; в) $\left(\frac{17}{28}\right)^5$, основание $\frac{17}{28}$, показатель степени 5; е) $\left(-\frac{51}{52}\right)^2$, основание $-\frac{51}{52}$, показатель степени 2; з) $\left(-\frac{3}{13}\right)^4$, основание $-\frac{3}{13}$, показатель степени 4.

3. а) m^4, основание m, показатель степени 4; в) $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2$, основание $z+\frac{1}{z}$, показатель степени 2; е) $(1-x)^4$, основание $1-x$, показатель степени 4; з) $\left(\frac{1}{R}\right)^7$, основание $\frac{1}{R}$, показатель степени 7.

4. а) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$; в) $0{,}9794 \cdot 0{,}9794 \cdot 0{,}9794 \cdot 0{,}9794 \cdot 0{,}9794$;
е) $(-181)\cdot(-181)\cdot(-181)\cdot(-181)\cdot(-181)\cdot(-181)\cdot(-181)\cdot(-181)\cdot(-181)$;
з) $\left(-\frac{51}{67}\right)\cdot\left(-\frac{51}{67}\right)\cdot\left(-\frac{51}{67}\right)$.

5. а) $t \cdot t \cdot t \cdot t$; в) $(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$;
е) $(a+b-c)\cdot(a+b-c)$;
з) $(2-3a+6b)\cdot(2-3a+6b)\cdot(2-3a+6b)\cdot(2-3a+6b)$.

6. а) $2^3 \cdot 7^2$; в) $\left(\frac{8}{3}\right)^3 \cdot 4^4$; е) $(-2)^3 \cdot 2^6$; з) $\left(-\frac{13}{17}\right)^2 \cdot (-7)^3$.

7. а) $2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4$; в) $7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 9$;
е) $7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2$; з) $5 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1$;
и) $6 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 8$;
л) $9 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 6$.

8. а) 49 287; в) 777 566 051; е) 39 415; з) 5 398.

9. а) $2{,}4 \cdot 10^7$; в) $2{,}7 \cdot 10^{16}$; е) $1{,}12 \cdot 10^{11}$; з) $1 \cdot 10^{18}$.

10. а) 970 000; в) 900 000 000; е) 4 418 029,7; з) 12 340.

11. а) $\frac{11\,251}{6}$; в) -7; е) 1; з) $\frac{1027}{12\,691}$.

14. а) Число x должно быть чётным; в) при любых значениях x;
е) Число x должно быть чётным; з) при любых значениях x.

К параграфу 1.3

1. а) a^5; в) z^8; е) t^{11}; з) w^{15}.

2. а) a^8; в) s^{300}; е) t^9; з) r^{254}.

3. а) 2^5; в) 3^8; е) 6^9; з) 3^{20}.

4. а) 7^{10}; в) $3^8 \cdot 5^{15}$; е) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$; з) $-(11{,}45)^{1\,000}$.

5. а) 117 649; в) 823 543.

6. а) 6 859; в) 2 476 099.

7. а) a^3; в) p^5; е) x^{33}; з) $s^{1\,234}$.

8. а) $3^3 = 27$; в) $11^3 = 1\,331$; е) $1^{421} = 1$; з) $4^4 = 256$.

9. а) $2^3 = 8$; в) $5^2 = 25$; е) $54^1 = 54$; з) $7^3 = 343$.

10. а) $(5x)^8$; в) $(l+1+q)^{146}$; е) $(r+R)^{96}$; з) $(13z)^{192}$.

11. а) 2^{28}; в) 11^8; е) 2^{20}; з) 67^6.

12. а) $3^4 = 81$; в) $(0{,}2)^2 = 0{,}04$; е) $2^{10} = 1\,024$; з) $10^4 = 10\,000$.

13. а) $(2m)^5$; в) $(j+y)^{17}$; е) $(z-s)^2$; з) $(p+qr+s)^{13}$.

14. а) a^{3+x}; в) h^8; е) p^k; з) $(d-e)^{6x-v}$.

К параграфу 1.4

1. а) $a^{27}c^{18}$; в) $27g^{21}h^{39}$; е) $-2^5u^{10}z^{20}$; з) $2^4m^8n^{16}q^{32}p^{64}$.

2. а) $-a^9b^6c^3$; в) w; е) b^4; з) $2q^{11}w^{10}$.

3. а) $(ab)^4$; в) $(xy^2z^3)^7$; е) $(6hs)^3$; з) $\left(\dfrac{2}{3}l^2n\right)^3$.

4. а) $10^3 = 1\,000$; в) 1; е) 1; з) 1.

5. а) $\dfrac{a^3}{b^3}$; в) $-\dfrac{11^3r^3}{12^3s^3}$; е) $\dfrac{3^4}{r^8}$; з) $\dfrac{2^7u^7}{3^7j^7}$.

6. а) $\dfrac{8}{27}$; в) $\dfrac{8}{125}$; е) $\dfrac{125}{64}$; з) $\dfrac{169}{196}$.

7. а) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^5$; в) $\left(\dfrac{2x}{y^2}\right)^8$; е) $\left(\dfrac{2}{t}\right)^5$; з) $\left(\dfrac{15f}{17g}\right)^5$.

8. а) $2^5 = 32$; в) 1; е) $\dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; з) 1.

9. а) a^9; в) a^{40}; е) a^{13}; з) a^{14}.

10. а) 3^6; в) 3^{12}; е) 3^{13}; з) 3^{81}.

11. а) $6^2 = 36$; в) $14^2 = 196$; е) $3 \cdot 7 = 21$; з) $10^2 = 100$.

12. а) $(ab^2)^4$; в) $(qw^2r^3)^{15}$; е) $(11d^{10}g^{30})^2$; з) $(13fh^{13})^{13}$.

13. а) $\dfrac{(a-1)^3}{b^3}$; в) $\dfrac{h^{12}\cdot q^8}{(h+q)^{12}}$; е) $\dfrac{(x+y)^4}{(x-y)^4}$; з) $\dfrac{m^6}{n^{12}}$.

14. а) $\left(\dfrac{2m}{3n}\right)^3$; в) $\left(\dfrac{0,2}{x}\right)^4$; е) $\left(\dfrac{2x^2}{t}\right)^4$; з) $\left(\dfrac{25u^{31}}{j^{61}}\right)^2$.

15. а) 1; в) 1; е) 1; з) 1.

16. Верно.

К параграфу 1.5

1. а) Одночлен; в) одночлен; е) не одночлен; з) одночлен.

2. в), г), е), ж), з).

3. а) $32a^5b^2c^3$; в) $-2x^{10}y^{11}$; е) $3d^2$; з) $120y^{14}x^{23}$.

4. а) -18; в) $-\dfrac{40}{3}$.

5. а) Да; в) нет; е) да; з) да.

6. а) -1; в) 144; е) -123; з) 36.

7. а) 7; в) 304; е) 0; з) 13.

8. $5n^5$; $5mn^4$; $5m^2n^3$; $5m^3n^2$; $5m^4n$; $5m^5$.

9. $2n^6$; $2mn^5$; $2m^2n^4$; $2m^3n^3$; $2m^4n^2$; $2m^5n$; $2m^6$.

К параграфу 1.6

1. а) Сумме степеней этих одночленов; б) произведению коэффициентов этих одночленов; в) также возводится в эту степень; г) степень не определена, а коэффициент равен 0; д) 0.

2. 0 и 3, 1 и 2, 2 и 1, 3 и 0.

3. а) $12a^5b^4$; в) $-2a^3bx^2yh^4$; е) $441p^{23}$; з) $264x^2yz^2$.

4. а) $9a^4b^2$; в) $\dfrac{25}{16}n^8m^6z^6k^8$; е) $512r^3t^6a^6b^3$; з) $0,00001x^{10}y^{20}z^{15}$.

5. а) $512x^9$; в) f^4ghr^2; е) $20r^3$; з) $-5a^{56}b^{10}d$.

6. а) $(2ab^2)^2$; в) $(17v^{17}f)^2$; е) $(12z^2b^4m^8)^2$; з) $(0,01s)^2$.

7. а) $(2ab)^3$; в) $(-a^3b)^3$; е) $\left(\frac{9}{13}j^{33}\right)^3$; з) $(10q^2d^{34})^3$.

8. а) $(2a^2b^3)^5$; в) $(4h^{17}g^{16})^5$.

9. а) $(6ab^2)^2 = (-6ab^2)^2$; в) $(9x^3)^2 = (-9x^3)^2$.

10. Утверждение Васи неверно, если среди одночленов-сомножителей имеется нулевой одночлен – ведь его степень не определена.

11. 6.

12. 11.

13. а) $135x^{13}y^2$; в) $-169x^8y^{45}z$; е) $\frac{1}{3}xk^3l^3$; з) $\frac{1}{10}h^{156}w^{143}$.

14. Да.

15. Нет.

К параграфу 1.7

1. а) Одночленом, если деление возможно;
   б) разности степеней одночлена-делимого и одночлена-делителя;
   в) отношению коэффициентов одночлена-делимого и одночлена-делителя;
   г) если найдётся такой одночлен C, произведение которого с одночленом B равно одночлену A.

2. Не обязательно.

3. а) Если показатель степени каждой буквы одночлена-делимого не меньше показателя степени этой буквы одночлена-делителя.
   б) Производя стандартные операции со степенями, производя упрощение дроби, представляющей собой отношение двух одночленов.

4. а) Нет; б) да.

5. а) Да; б) да.

6. а) Да; в) нет; е) да; з) да.

7. а) a; в) $3u^5$; е) l; з) $16c^3$.

8. а) $\frac{1}{4}b^2$; в) $2q^4ws$; е) $\frac{11}{7}sv^8$; з) $\frac{3}{2}v^2hd^2$.

9. а) $2ab^2$; в) $\frac{10}{13}p^4r^4v^{17}$; е) $\frac{35}{11}a^{22}k^{20}$; з) $-4a^{10}k^{14}p^{10}s^4$.

10. а) $9a^5b^3$; в) $-\frac{3}{8}m^{23}u^{50}v^{32}$; е) $-\frac{8}{9}a^6b$; з) $\frac{729}{16}e^2g^{19}m^{20}$.

11. а) $-6a^2b^2$; в) $-5p^{20}v^{11}w^4$; е) $14ab^3x$; з) $-t^5w^8y^{16}$.

12. а) $-2x^2y$; в) $\frac{5}{4}x^2z$; е) $-10hs^4z^{11}$; з) $-\frac{8}{3}b^4j^{10}r^6x^4$.

13. Может.

14. Обязательно.

К параграфу 1.8

1. а) Они одинаковые или отличаются только коэффициентами;
б) их коэффициенты являются противоположными числами;
в) сумме их коэффициентов;
г) степени каждого из подобных многочленов или 0, если они противоположны или нулевые.

2. а) Буквенную часть любого из них умножить на сумму их коэффициентов;
б) буквенную часть любого из них умножить на разность их коэффициентов;
в) согласно правилу вынесения общего множителя за скобку.

3. Да.

4. Верно.

5. а) $a^3b^2c^2$; в) $e^{12}r^{10}y^2$; е) $e^2f^{12}h^{11}j^{15}l^{16}z^7$; з) буквенная часть отсутствует.

6. а) 14; в) 71; е) 23; з) 69.

7. а) $-5ab^2$ и $-17ab^2$; в) $8,4d^3l^{18}y^6$ и $59d^3l^{18}y^6$; д) подобных одночленов нет.

8. а) $20x$; в) $28c^{20}$; е) $-63k^5$; з) $-56j^2$.

9. а) $7a^3b^2c$; в) $32a^7t^{14}y^{13}$; е) $-155d^{10}u^{17}$; з) $86d^{17}z^5$.

10. а) $5x$; в) $-47c^{10}$; е) $-46b^7$; з) $-138g^{12}$.

11. а) $-4ab^2c^2$; в) $70rt^{16}w^5$; е) $158c^6e^{14}$; з) $31a^{12}p^{12}$.

12. а) $24p$; в) $-16f^2$; е) $-3a^2$; з) $13y^2$.

13. а) $-x^3y^5$; в) $-5a^3t^3$; е) $-27d^9e^{12}x^2$; з) $6g^{17}h^5$.

14. Не всегда.

15. а) $m = 6$, $n = 2$; в) $m = 23$, $n = 5$; е) $m = 25$, $n = 30$; з) $m = 27$, $n = 24$.

16. а) $-13x^3y^6$; в) $-86s^3u^2$; е) $78m^{36}p^{39}$; з) $-\frac{66}{41}r^3w$.

К параграфу 2.1

1. а) Сумма одночленов; б) приведены все подобные многочлены и все одночлены записаны в стандартном виде; в) привести подобные многочлены и все одночлены записать в стандартном виде; г) многочлен стандартного вида, состоящий из трёх членов; д) наибольшая степень входящего в него одночлена; е) не определена.

2. Нет.

3. Нет.

4. а), б), г), д), е), ж), з).

5. а), в), е), ж).

6. а) $b^2 - 2a$; в) $6y + 18x - y^2$; е) 0; з) $4f^4$.

7. а) 1; в) 7; е) 10; з) 5.

8. а) −1; в) 43.

9. а) $10a^3b$; в) $40kt^3$; е) $4g^4x^7$; з) $-p^4s^5$.

К параграфу 2.2

1. а) Многочлен, членами которого являются все члены данных двух многочленов;
б) многочлен, членами которого являются все члены многочлена-уменьшаемого и члены, противоположные членам многочлена-вычитаемого; в) многочлен, составленный из членов, противоположных членам данного многочлена.

2. Нулевому многочлену.

3. а) Они противоположны; б) они равны.

4. а) $3x^2 + 1$; в) $-5f^2 + 6fj + 11f$; е) $-21t^2 + 14t^3 + 13t^4 - 7t^5$;
з) $6c^2 - 5cy^2 + 28y^3 + c^3y$.

5. а) $x^2 - x$; в) $-31l^2 + 7l^5 - 36l^6$; е) $-2e^5 + 16e^4m - 11e^3m^6$; з) $-4 - 3z^3 + 25z^4$.

6. а) $5xy$; в) $5r^3 - 7a^4r^3$; е) $10uv^2 - 5v^3 - 6uv^3$; з) $d^2y^3 - 25y^2$.

7. а) $7xy$; в) $15 - 32h^2$; е) $-4 + 30t^3 - m^3t^3$; з) $-3 + 25z - 7ez$.

8. а) $-6a + 4ab - 4a^2b + 4ab^2$; в) $13l^3s + 31ls^2$; е) $44a^3 + 16aw^3 + 12a^3w^3$;
з) $-18 - 35v - 14v^2$.

9. а) $-(-6ab^2 + a^2b) + (-3ab + 6a - 7b)$;
в) $-(-6g^2 + 3g^3) + (-17x - 6g^2x + 13x^3)$;
д) $-(-14j^3 - 5u^2) + (-8u^3 + 12j^2x - 12u^2x)$.

10. а) $-3a$; −6; в) $22x + y^3 - y$; −16; е) $-4b + 7$; −1; з) $6x - 4$; 20.

12. а) $3 - 6v - v^2 - 8x^2$; в) $-y - x^2y$.

13. а) Степень суммы и разности равна 3; б) одна из степеней суммы или разности равна 3, другая может быть любым числом от 0 до 3 или может быть не определена.

К параграфу 2.3

1. а) Многочлен, членами которого являются произведения членов многочлена-сомножителя на одночлен-сомножитель;

б) многочлен, членами которого являются произведения одночлена-сомножителя на члены многочлена-сомножителя;

в) сумме степеней многочлена и одночлена, которые перемножались.

2. Они равны.

3. а) 7-ю, б) она равна 4.

4. а) $24p - 6p^2 + 18p^3$; в) $9h^4 - 18h^3 - 9h$; е) $-3t^3 - 7t^2 + 6t^4$;
з) $14k^3 + 24k^2 + 12k$.

5. а) $-10t^2 - 6t^4 + 4t^5$; в) $-2x^{12} + 26x^{13} + 12x^{14}$; е) $-8a^{18} + 32a^{21} + 16a^{30}$;
з) $18c^{30} + 6c^{42} - 15c^{61}$.

6. а) 6; в) 16; е) 38; з) 24.

7. а) $14abc^2 - 7ab^2c$; в) $b^6m^8y^2 - 3b^6m^8y^3$; е) $\frac{1}{3}j^7r^5 + \frac{1}{7}j^6r^8$; з) $\frac{2}{5}a^6k^5 - a^5k^6$.

8. а) $28x^2y^3z^2 - \frac{63}{2}xy^3z^3$; в) $10b^4r^4u^5 + 3b^4r^2u^6$; е) $4f^3j^3m^5 - 3f^5j^2m^3$;
з) $5j^4n^7 + 40j^6n^8 - 5j^5n^6$.

9. Нет.

10. а) $2ab^3$; в) a^3g^2; е) $5r^6w^4$; з) $-2j^3u^2$.

11. а) $4a + 8a^2b - 18a^3b^2 + 12a^2b^3$, 104; в) $-4h^2x^3$, 288; е) $11cs^2$, 100;
з) $8a^4$, $\frac{1}{32}$.

К параграфу 2.4

1. а) Многочлен, членами которого являются произведения каждого члена одного многочлена на каждый член другого многочлена;
б) сумме их степеней.

2. Они равны.

3. а) 7-ю; б) она равна 4.

4. а) $4 - 9p + 5p^2 - 6p^3$; в) $50 - 60d - 122d^2 - 36d^3$; е) $-18 + 7l + 38l^2 - 12l^3$;
з) $12 + 8f - 41f^2 - 35f^3$.

5. а) $5 - 15t + 3t^2 - 11t^3 + 6t^4$; в) $45c^3 + 35c^5 + 18c^7 - 72c^8 + 14c^9 - 56c^{10}$;
е) $20r^3 + 50r^4 + 20r^5 + 50r^6 - 40r^{10} - 40r^{12}$;
з) $28x^5 - 35x^6 + 14x^8 - 36x^{10} + 45x^{11} - 18x^{13}$.

6. а) 6; в) 30; д) 26.

7. а) $a^2 + ab + ac + bc$; в) $-45t^4 - 12t^2u^2 + 12u^4$; е) $-20 + 74v^2 - 42v^4$;
з) $-18f^2 + 70fF + 100F^2$.

8. а) $6 - 13x + 6x^2$; в) $-9 + 97n - 70n^2$; е) $-4 + 18t + 30t^2 - t^3 - 9t^4$;
з) $20 - 35l + 57l^2 - 62l^3 + 56l^4$.

9. а) $24 - 14x - x^2 + x^3$; в) $-135 - 33v + 7v^2 + v^3$; е) $-50 + 65u - 16u^2 + u^3$;
з) $84 - 5r - 8r^2 + r^3$.

10. а) $-3 - 8z + z^2$; в) $-41 + 32a - 108a^2 + 9a^3$; д) $-10 + 15p - 139p^2 + 94p^3$.

11. а) $1 + x^3$; в) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3$;
е) $10e^3 - 4e^4 - 426e^5 - 252e^6$; з) $90 + 57r + 124r^2 + 36r^3 + 35r^4$.

14. а) $-24x + 12x^2$; в) $12 + 60d - 30d^2$.

15. а) да; б) да; в) да; г) да; д) нет.

К параграфу 2.5

1. а) Многочлен, произведение которого с одночленом равно начальному многочлену;
б) на этот одночлен делится каждый член многочлена;
в) каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

2. Найти произведение частного и одночлена.

3. Нулевой степени.

4. а) $-6 + 2u$; в) $2 + e^6$; е) $-5s + 7s^4$; з) $r + 9r^2$.

5. а) $-3 + 2t - tu$; в) $\frac{5}{4}c^4 + s^2 - \frac{5}{2}c^2s^8$; е) $h^8 + 2hk + k^3$; з) $5c^5 + 5f^2 - c^4f^2$.

6. а) $a + b$; в) $s + \frac{19}{5}sz - 4z^3$; е) $1 + h^3p + h^5p^6$; з) $a^2 + 2u^3 + 25u^6$.

7. а) $x(a + 3b)$; в) $7g(13d^2 + 4f^2)$; е) $3t(20e^2 + 19m)$; з) $7my(17k - 8m)$.

8. а) $3ab(a + 2b)$; в) $68kxyz(1 + z)$; е) $7l^3y^2(5 + 3y^2)$; з) $3m^3uw^2(18 - 17m^2)$.

9. а) $5y(-5x + 4y + 3xy)$; в) $2a^2d^6(7 - 13d + 13dz^2)$; е) $6j^2(-1 + 7jy + 3jy^2)$;
з) $9a^4x^4(a^2 + x + 8ax)$.

10. а) $3a^3(2a^2 - 3a - 4)$; в) $s^3(3 + s)(4 + s)$; е) $z^5(z - 4)(1 + z)$;
з) $b^5(1 + b)(3 + b)$.

11. а) $6a^2x(a + 3x - 2x^2)$; в) $p^2y^2(17 + 4py - 18p^2y^2)$;
е) $20n^2p^2(-2n + 9p + 6n^2p^2)$; з) $10vw^2(-4 + 7v + vw^2)$.

12. а) $-x^2(-11 - 16x + 2x^3)$; в) $8u^{17}(4 + 5u^{11} + 4u^{13})$; е) $11e^{12}(1 - e^6 + 15e^9)$;

з) $k^{1\,012}(11k^3 - 5 - 18k^8)$.

15. Разности степеней многочлена и одночлена, если частное существует.

16. а) 1-ю; б) она равна 4.

18. Сумма трёх последовательных натуральных степеней тройки обязательно делится на 13. Сумма четырёх последовательных натуральных степеней тройки обязательно делится на 40.

К параграфу 3.1

1. а) $6x$; в) $4f^3$; е) $30lx^4$; з) $-2v^3y^5$.

2. а) $(y+2)^2$, $(y-2)^2$; в) $(8m^3+7)^2$, $(8m^3-7)^2$; е) $(5e+4q)^2$, $(5e-4q)^2$; з) $(2d+(-5d))^2$, $(2d-(-5d))^2$.

3. а) Сумме их квадратов и их удвоенного произведения;
б) сумме их квадратов без удвоенного произведения.

4. а) 5 184; в) 10,24; е) 99,8001; з) 42,25.

5. а) $n^2 + 12n + 36$; в) $16 + 24y + 9y^2$; е) $4c^2 + 28cd + 49d^2$; з) $81a^2 + 18at + t^2$.

6. а) $9n^2 + 2n + \frac{1}{9}$; в) $144a^2 - 12a + \frac{1}{4}$; е) $\frac{4}{9}c^2 + 8cd + 36d^2$;

з) $324m^2 + 8mn + \frac{4}{81}n^2$.

7. а) $k^2 - 16k + 64$; в) $169p^2 - 78p + 9$; е) $9c^2 - 12ct + 4t^2$; з) $121e^2 - 88eu + 16u^2$.

8. а) $4h^2 - h + \frac{1}{16}$; в) $\frac{16}{9}y^2 - 3y + \frac{81}{64}$; е) $\frac{25}{36}c^2d^2 - 5cdx + 9x^2$;

з) $\frac{16}{25}r^2 - 8rw + 25w^2$.

9. а) $a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2$; в) $9c^2v^2 + 60cuvy + 100u^2y^2$; е) $9d^2 - 24df + 16f^2$; з) $25e^2 - 60es + 36s^2$.

10. а) $\frac{25}{36}b^2 - \frac{1}{2}bc + \frac{9}{100}c^2$; в) $36x^2 - 4x^3 + \frac{1}{9}x^4$; е) $\frac{9}{49}a^2b^2 + ab^2c + \frac{49}{36}b^2c^2$;

з) $25j^4 + 8j^2w^2 + \frac{16}{25}w^4$.

11. а) $(4x)^2$; в) $(3n^3)^2$; е) $(pq^2)^2$; з) $\left(\frac{2}{3}m^4\right)^2$.

12. а) $(m+3)^2$; в) $(10b+2)^2$; е) $(8c+3)^2$; з) $(4r+5)^2$.

13. а) $(c-2)^2$; в) $(6r-1)^2$; е) $\left(\frac{e}{2}-2i\right)^2$; з) $(3{,}5+2h)^2$.

14. а) $\left(\frac{l}{3}+\frac{p}{2}\right)^2$; в) $(5a+10d)^2$; е) $\left(x+\frac{21}{5}\right)^2$; з) $(7e+3el)^2$.

15. а) $(3m+1)^2$; в) $(4fu-8u)^2$; е) $\left(\frac{9a}{2}+i\right)^2$; з) $(4+7ls)^2$.

16. а) Нет; в) нет; е) да; з) да.

17. а) $(m+2)^2$; в) $(3q+2r+4s)^2$; е) $(1+x-y)^2$; з) $(2-a+c)^2$.

21. а) Да; б) $\frac{1}{2}n(n-1)$.

К параграфу 3.2

1. а) $2(4\cdot x)$; в) $2\left(\frac{1}{2}\cdot m\right)$; е) $2(1\cdot z)$; з) $2(0{,}067\cdot g)$.

2. а) $(y-1)^2-1$; в) $(8m+10)^2-100$; е) $\left(\frac{3}{2}h+1\right)^2-1$; з) $(3w-7)^2-49$.

3. а) $\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$; в) $\left(m-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$; е) $\left(4c+\frac{5}{8}\right)^2-\frac{153}{64}$; з) $(b-2)^2-9$.

4. а) $\left(x+\frac{1}{12}\right)^2-\frac{289}{144}$; в) $\left(s+\frac{11}{12}\right)^2-1$; е) $\left(m-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{1}{2}$; з) $\left(\frac{2}{5}r+\frac{25}{18}\right)^2-\frac{463}{324}$.

5. а) $6(x+2)^2-24$; в) $50\left(w+\frac{1}{5}\right)^2+5$; е) $10\left(a+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{61}{2}$; з) $32\left(x-\frac{9}{32}\right)^2+\frac{143}{32}$.

6. а) $\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{13}{2}$; в) $\frac{1}{3}\left(8l+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$; е) $\frac{2}{3}(a-6)^2$; з) $\frac{32}{5}\left(y-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{22}{5}$.

7. а) $-\frac{7}{10}(y-10)^2+73$; в) $\frac{1}{5}\left(2y-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{85}{16}$; е) $-\frac{147}{2}\left(x-\frac{1}{14}\right)^2-\frac{37}{8}$;

з) $-\frac{147}{10}\left(m-\frac{9}{98}\right)^2+\frac{8\,083}{1960}$.

11. а) -48, $x=7$; в) -16, $j=-\frac{5}{2}$.

12. а) 17, $x=4$; в) -15, $b=\frac{3}{2}$.

13. а) -1, $x=0$, $y=-1$; в) 17, $x=-3$, $y=2$.

К параграфу 3.3

1. а) $3(3^2 \cdot x)$, $3(3 \cdot x^2)$; в) $3((-7)^2 \cdot (-3s))$, $3((-7) \cdot (-3s)^2)$;
е) $3((-7z)^2 \cdot (n))$, $3((-7z) \cdot n^2)$; з) $3((-v)^2 \cdot (3c))$, $3((-v) \cdot (3c)^2)$.

2. а) $(y + 2)^3$, $(y - 2)^3$; в) $(5 + 2s)^3$, $(5 - 2s)^3$; е) $(l^2 + m^3)^3$, $(l^2 - m^3)^3$;
з) $(-pq + qw)^3$, $(-pq - qw)^3$.

4. а) 9 261; в) 32,768; е) 456,533; з) −59,319.

5. а) $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$; в) $216x^3 + 216x^2 + 72x + 8$; е) $8c^3 + 36c^2 + 54c + 27$;
з) $27h^3 + 189h^2 + 441h + 343$.

6. а) $8m^3 + 36m^2n + 54mn^2 + 27n^3$; в) $125p^3 + 375p^2t + 375pt^2 + 125t^3$;
е) $c^6 + 18c^4d + 108c^2d^2 + 216d^3$; з) $125d^3 + 150d^2y + 60dy^2 + 8y^3$.

7. а) $k^3 - 3k^2 + 3k - 1$; в) $216f^3 - 432f^2 + 288f - 64$;
е) $27c^3 - 54c^2t + 36ct^2 - 8t^3$; з) $216v^3 - 216av^2 + 72a^2v - 8a^3$.

8. а) $8h^3 - 48h^2k + 96hk^2 - 64k^3$; в) $343p^3 - 735p^2st + 525ps^2t^2 - 125s^3t^3$;
е) $m^3n^3 - 9lm^2n^2 + 27l^2mn - 27l^3$; з) $-64m^6 - 96m^4yz - 48m^2y^2z^2 - 8y^3z^3$.

9. а) $8x^3 - 6x^2 + \frac{3x}{2} - \frac{1}{8}$; в) $\frac{27}{64}j^3 + \frac{27}{16}j^2 + \frac{9}{4}j + 1$;

е) $\frac{8}{27}a^3c^3 + 4a^2c^2m + 18acm^2 + 27m^3$; з) $\frac{64}{27}e^3 - \frac{64}{21}ae^2 + \frac{64}{49}a^2e - \frac{64}{343}a^3$.

10. а) $a^6b^3 - 3a^4b^2cd^2 + 3a^2bc^2d^4 - c^3d^6$;
в) $8m^3p^{33}t^9 + 72m^4p^{33}t^{14} + 216m^5p^{33}t^{19} + 216m^6p^{33}t^{24}$;

е) $f^{18}i^{21} + \frac{9}{2}f^{12}g^3i^{14}v^8 + \frac{27}{4}f^6g^6i^7v^{16} + \frac{27}{8}g^9v^{24}$;

з) $\frac{125}{8}g^6i^{30} + \frac{375}{32}g^4i^{20}ms + \frac{375}{128}g^2i^{10}m^2s^2 + \frac{125}{512}m^3s^3$.

11. $(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$.

12. $(x \pm y)^5 = x^5 \pm 5x^4y + 10x^3y^2 \pm 10x^2y^3 + 5xy^4 \pm y^5$.

К параграфу 3.4

1. а) Произведению разности этих выражений на их сумму; б) разности квадратов этих выражений.

2. а) $(4x)^2 - (5y)^2$; б) $(4x - 5y)^2$.

3. а) 4 891; в) 35,96; е) 63,9996; з) 999 999.

4. а) 471; в) 300; д) 54,78.

6. а) $(5y)^2$; в) $(3n^3)^2$; е) $(xy^2)^2$; з) $\frac{17}{12}f^{14}$.

7. а) $(5y-1)(5y+1)$; в) $(2m-3n)(2m+3n)$; е) $(xy-2)(xy+2)$;
з) $(7vx^3-6c^2h)(7vx^3+6c^2h)$.

8. а) $16(4x-1)$; в) $(10+3e)(2+17e)$; е) $9(2m-3)(4m-1)$; з) $(13+b)(5+9b)$.

9. а) $16y(2x^2-y)$; в) $-(3t+2y^5)(t+14y^5)$; е) $12y(d^2+6y)$;
з) $(5p^2-13s^3)(s^3-p^2)$.

10. а) $7(7+4x^2)$; в) $(1-y)(15y-1)$; е) $(8-9x+3x^5)(-8+9x+3x^5)$;
з) $4(1+2t-2t^2)(-1+2t+2t^2)$.

11. а) $25-x^2$; в) $128l^2-50$; е) t^2-64y^2; з) $40h^2-490g^2$.

12. а) x^4-1; в) $625m^4-n^4$.

13. а) x^8-1; в) $a^{32}-b^{32}$.

14. а) $(x^2-1)^2$; г) $(a^2+2ab+b^2-c^2)^3$.

15. а) $35^2>34\cdot 36$; в) $7{,}9\cdot 7{,}7<7{,}8^2$.

17. а) $(1+x)(7+x)$; в) $4(6g-23)(6g-17)$.

К параграфу 3.5

1. а) a^2+ab+b^2; сходство с полным квадратом суммы $a^2+2ab+b^2$; б) коэффициентом при произведении ab.

2. а) a^2-ab+b^2; сходство с полным квадратом разности $a^2-2ab+b^2$; б) коэффициентом при произведении ab.

3. а) y^2+2y+4; y^2-2y+4; в) $25-15k+9k^2$; $25+15k+9k^2$;
е) u^2+uf+f^2; u^2-uf+f^2; з) $4s^4+8s^2d^4+16d^8$; $4s^4-8s^2d^4+16d^8$.

4. а) Произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы; б) произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности; в) разности кубов двух выражений; г) сумме кубов двух выражений.

5. а) $(4x)^3-(5y)^3$; б) $(4x-5y)^3$; в) $(4x)^3+(5y)^3$; г) $(4x+5y)^3$.

7. а) $(2y)^3$; в) $(n^2)^3$; е) $(xy^2)^3$; з) $\left(\frac{5}{6}a^3\right)^3$.

8. а) $(3y-1)(9y^2+3y+1)$; в) $(m^2+n)(m^4-m^2n+n^2)$;
е) $(jq^2v+7)(j^2q^4v^2-7jq^2v+49)$; з) $\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{3}t\right)\left(\frac{81}{4}+\frac{3}{2}t+\frac{1}{9}t^2\right)$.

9. а) $(5y-4x)(16x^2+20xy+25y^2)$; в) $\frac{1}{8}(m^2-6n)(m^4+6m^2n+36n^2)$;

е) $\frac{1}{64}(3+5k^{34})(9-15k^{34}+25k^{68})$; з) $\frac{27}{64}(h^3+2y^2)(h^6-2h^3y^2+4y^4)$.

10. а) $(5x-1)(1+2x+13x^2)$; в) $(3+5p)(21+30p+13p^2)$;
е) $4(d-1)(31+10d+7d^2)$; з) $2(k-1)(49-50k+13k^2)$.

11. а), в), д), ж).

12. а) b^3-c^3; в) $8e^3-27j^3$; е) m^3+8; з) $729+w^3$.

13. а) $8u^3-1$; в) $\frac{343}{729}s^9-\frac{729}{343}r^{12}$; е) $27x^3+8y^3$; з) $\frac{1}{1\,000}x^3+\frac{1}{125}y^3$.

14. а) $2x(27+x^2)$; в) $\frac{1}{64}(s+4y)(37s^2-40sy+16y^2$;
е) $\frac{1}{64}(s+2x)(61s^2-134sx+76x^2)$; з) $\frac{1}{216}(9a-20w)(351a^2+36aw+112w^2)$.

15. а) x^6-1; г) $a^6X^6-b^6Y^6$.

16. а) x^6-1; г) $a^6X^6-b^6Y^6$.

17. а) $(x^3-1)^2$; г) $\left(\frac{64}{729}u^3-\frac{8}{1\,331}v^3\right)^3$.

К параграфу 3.6

1. а) $2c(4ab-3bd+2ad)$; в) $3f(2-6g+fg)$; е) $-m(2-3gn+mn)$;
з) $-7(3eRW+2ERW+wer)$.

2. а) $a^2b(6ab^2-3abc+2c^2)$; в) $3fg^2h(3f^3+6f-5)$;
е) $5m^2n^3(6d^2-m^2-5m^2n^2)$; з) $-5e^2rw^4(4+3e+2rw)$.

3. а) $(3a-m)(3a+m)$; в) $(x+2y)^2$; е) $(4d-3s)^2$; з) $(5a+3b)^2c$.

4. а) $5x(x+10)$; в) $4a^2$; е) $(3h+j^2)^3$; з) $(5l^4-3n^4)^2$.

5. а) $(n-m)(3+m+n)$; в) $(x^2+y)(1+4y)$; е) $(1+j)(1+3g+j)$;
з) $2(1+i)(1+i+j)$.

6. а) $(3a+2b)(2a+3c)$; в) $(5h-3)(10-48h+67h^2)$;
е) $(a-c)(a^2+b^2+c^2)$; з) $mn(m-n)(m-n-s)$.

7. а) $5m(n^2-3)^2$; в) $(b-a)(ab-4)$; е) $(f+2g)(3-fg)$;
з) $3f^4g^4(g+g^2-5f^6)$.

8. а) $(1+x-y)(xy-z)$; в) $b(2-a)(b-3-2a)$;
е) $xy(x-3y)(x-2y)(x+y)$; з) $(a-b+c-d+e)(a+b+c+d+e)$.

9. а) $(1+x-y)(x+y)$; в) $(m-n)(2+m^2+mn+n^2)$;
е) $(4d+3s)(9+16d^2-12ds+9s^2)$;
з) $(5k^3+3v^4)(-4+25k^6-15k^3v^4+9v^8)$.

10. а) $12y(x^2 + 5y)$; в) $4zZ$; е) $(h + t)(631h^2 + 1\,088ht + 469t^2)$;
з) $(7f + 5g)(13f^2 + 19fg + 7g^2)$.

11. а) $(x + y - z)(x + y + z)$; в) $(2 + x - y)(2 + x + y)$;
е) $(a^2 - b^2 + 2a^2b^2)(a^2 - b^2 - 2a^2b^2)$; з) $(5x - 7y + xy)(5x + 7y + xy)$.

12. а) $x(x - 5)(x^2 - 10)$; в) $z^3(1 + z)(2z - 3)(3 + 2z)$;
е) $(1 + n)^2(1 + n^2)(1 - n + n^2)$; з) $r^3s^2(3 + 2r^9)(3s^2 - 2)$.

13. а) $6y(x - y)(x + y)$; в) $(3 + 2x^2)(1 + 14x^2 + x^4)$;
е) $(r - 1)(1 + r + r^2)(2r^2 - 3)(3r^4 - 2)$; з) $-\dfrac{3}{4}a(a - 2b)(a + 2b)$.

14. а) $(4 + x)(6 + x)$; в) $6(y - 1)(3 + y)$;
е) $(f - h)^2(f + h)(f^2 - fh + h^2)(f^2 + fh + h^2)^2$; з) $4(k - 2)(2 + k)(k + y)^2$.

17. а) $(a - b)(a - c)(b - c)$; б) $-(a - b)(a - c)(b - c)$.

18. а) $3(x + y)(x + z)(y + z)$; б) $(x + y + z)(x^2 - xy + y^2 - xz - yz + z^2)$.

К параграфу 3.7

1. а) Буквенное выражение; б) многочлен стандартного вида.

2. а), г), е), ж).

3. б), г), д), ж).

4. а) $6 + a^2$; в) $4XY$; е) $216f^2g + 128g^3$; з) $12aA^2 - 48a^2A$.

5. а) $4p^2 + 9q^2$; в) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$; е) $-3u^2v - 3uv^2$; з) $6xz^2 + 6yz^2$.

6. а) $18c$; в) $2u^2v + 2uv^2$; е) $40 + 56xy$; з) $4x^6y^2 - 4x^4y^4 + 4x^2y^6$.

7. а) $6xy - 8x$; в) 0; е) $2f^2 + 2g^2 - 2h^2$; з) $8x$.

8. а), б), д), з).

К параграфу 4.1

3. а) 21,5; в) 1; е) 3,3; з) 8,75.

4. а) 1; в) $-2\dfrac{2}{3}$; е) 2,5; з) −2,5.

5. а) 1; в) 3,5; е) 3; з) −4,75.

6. а) 18,5; в) 55; е) 14,35; з) 9.

8. а) 1, 2, 4, 8; в) таких нет.

9. а) Нет; в) нет.

10. а) Нет; в) да, например, $x = 2$.

К параграфу 4.2

4. а) $a = -1$, $b = 17$; в) $a = \frac{2}{3}$, $b = 3$; е) $a = 7$, $b = 0$; з) $a = 1$, $b = 1$.

5. а) 2; в) 3; е) −0,6; з) x – любое число.

6. а) −0,5; в) −1,5; е) 3; з) 4.

7. а) 9; в) −0,5; е) $2\frac{4}{5}$; з) −0,5.

8. а) $2x - 5 = 0$; в) $2x + 3 = 0$.

9. а) $a = 0$; в) ни при каких.

10. а) $a = -1$; в) ни при каких.

11. а) Ни при каких; в) $a = -1$.

12. а) 4 и 14; в) 2 и 6,4.

13. а) ± 2,8; в) 0,2 и 5,8.

К параграфу 4.3

1. а) 1; в) 6; е) 24; з) 13.

2. а) −1,2; в) 20; е) 21; з) 6.

3. а) 3; в) 1,5; е) 81; з) 9.

4. а) $1\frac{11}{14}$; в) −19; е) −18; з) 8,5.

5. а) 8; в) −5; е) 26; з) −2.

6. а) $\frac{5}{6}$; в) 8; е) −1; з) −2,5.

7. а) −9; в) −2; е) 5; з) −2.

8. а) 0 и 1; в) 2 и −1; е) 0,2 и 0; з) ± 0,5.

9. а) 0 и ± 1; в) 0 и ± 2.

10. а) 1; в) −2,5.

11. а) −4; в) 5.

К параграфу 4.4

2. 33.
4. 60 м и 72 м.
6. 10 деталей.
8. 14 и 50 лет.
10. 48 кг, 24 кг, 8 кг.
12. 120 км.
14. 5 и 6.
16. 1 ч 40 мин.
18. 5.
20. 26.

К параграфу 5.1

5. а) $3x - 2y = 0$; в) $x = -2$.
6. а) $y = 2$; в) $6x + y = 0$.
7. а) $x = 1 - y$; в) $x = 8 - 4y$; е) $x = 3 - 2y$; з) $x = y + 1,5$.
8. а) $y = 1 - x$; в) $y = 2x - 2$; е) $y = \frac{x}{4}$; з) $y = 2x$.
9. а) Да, например, (7; 1); в) нет.
10. а) (2; 1); в) нет решений.
11. $a = 6$.
12. $b = 4$.
13. $c = -23$.
14. а) (3; 3).
15. а) $3x - 2y = 0$; в) $x - y = 0$.
16. $a = 1,6$.
17. а) (−1; 1); г) нет решений.

К параграфу 5.2

4. –6,5.

6. См. рис. 8.

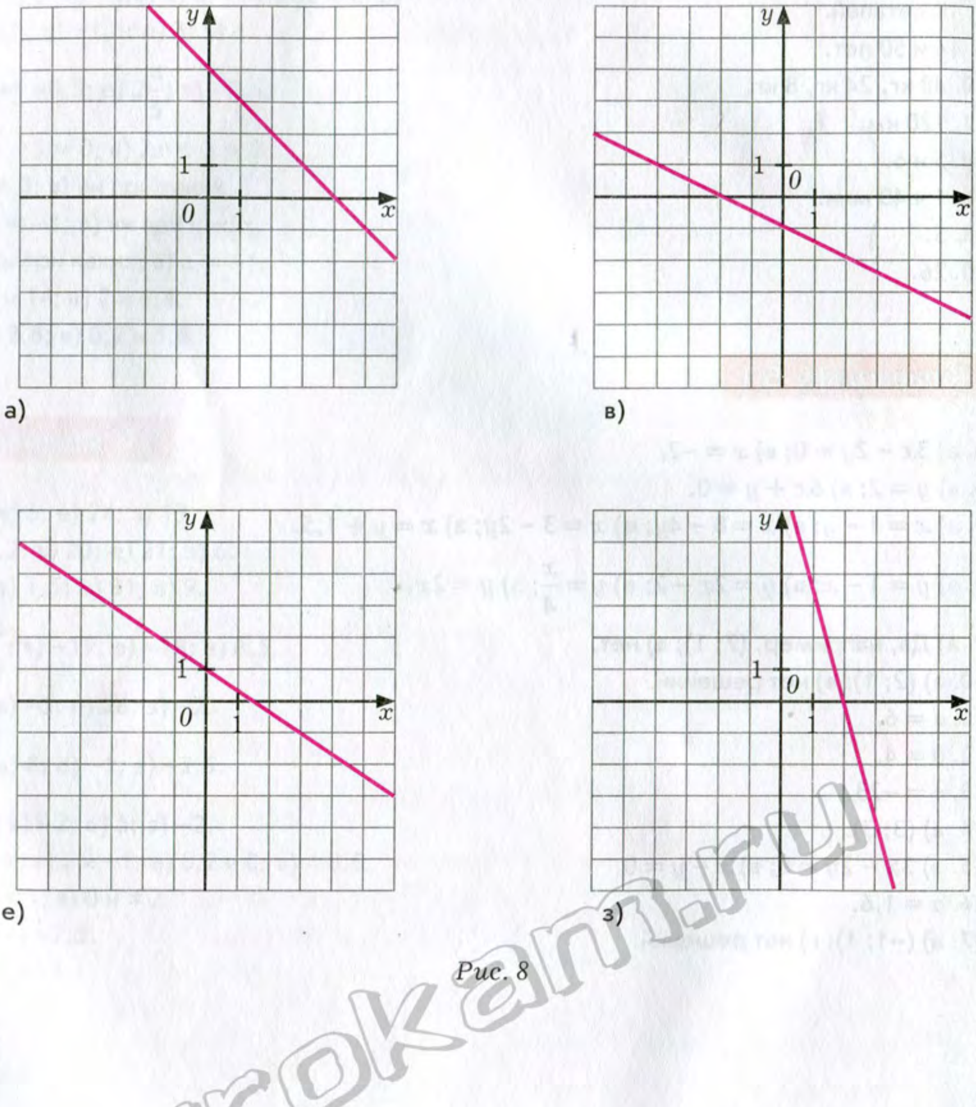
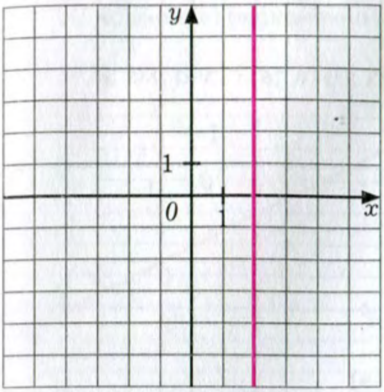
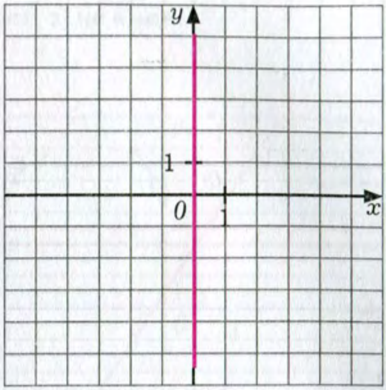


Рис. 8

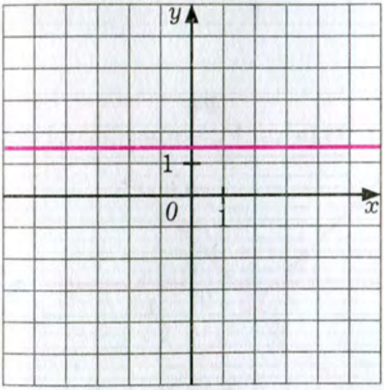
7. См. рис. 9.



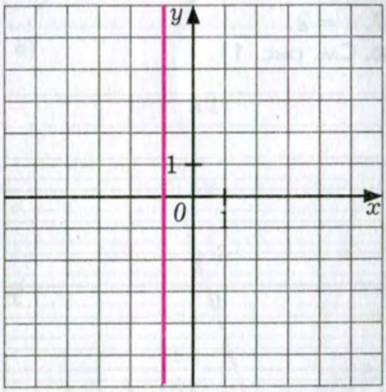
а)



в)



е)



з)

Рис. 9

8. а) $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$; б) $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$.

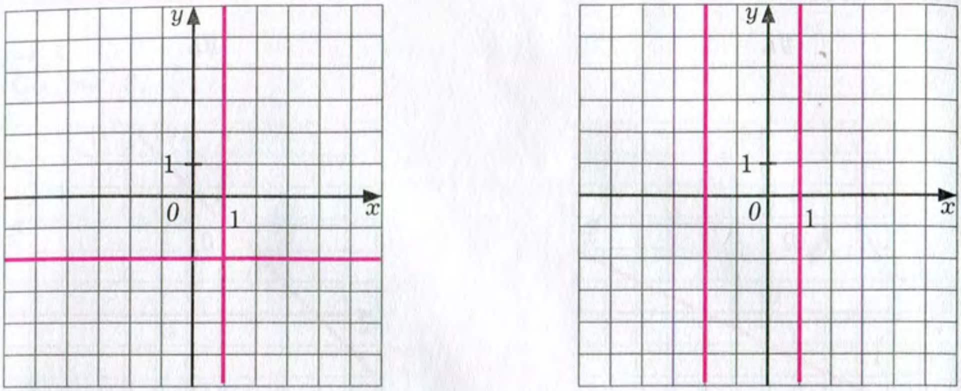
11. а) $y = 2$; б) $x = -1$.

13. $a = 2$.

14. $c = 0$.

15. $a = 1$; $b = -1$.

16. См. рис. 10.

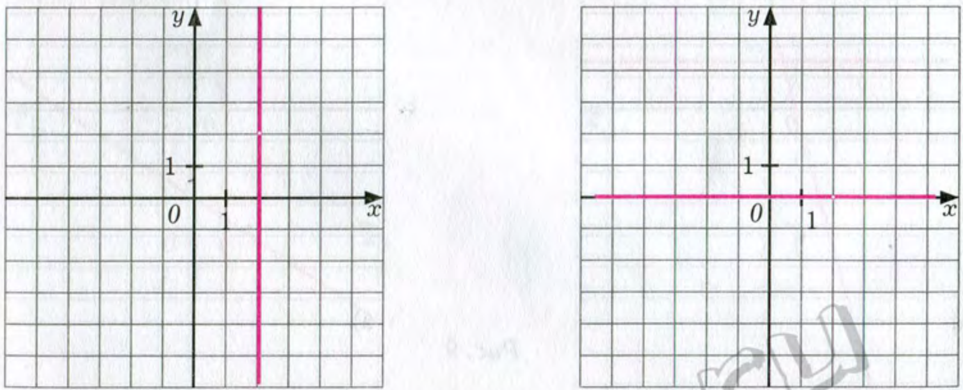


а) в)

Рис. 10

17. $a = 2$.

18. См. рис. 11.



а) г)

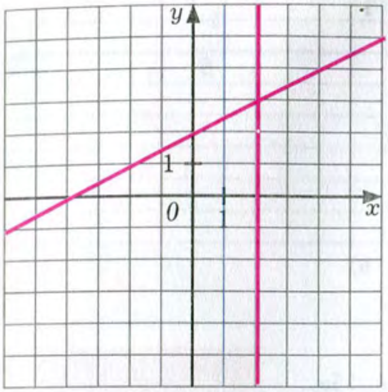
Рис. 11

19. $a = 1{,}25$.

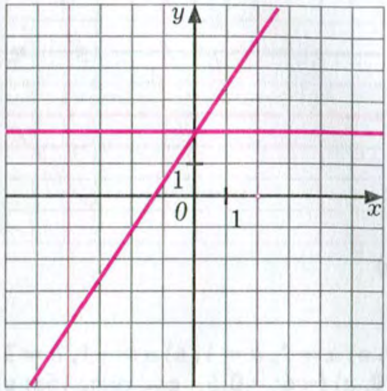
К параграфу 5.3

3. а) Нет корней; в) бесконечно много; е) не имеет; з) не имеет.

4. а) (2; 3), см. рис. 12а; в) (0; 2), см. рис. 12в.



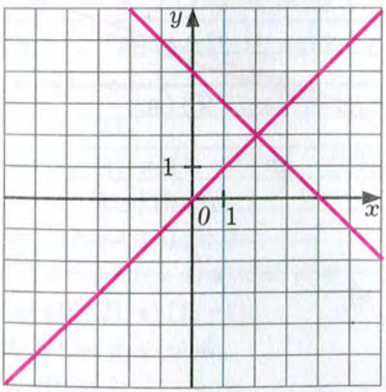
а)



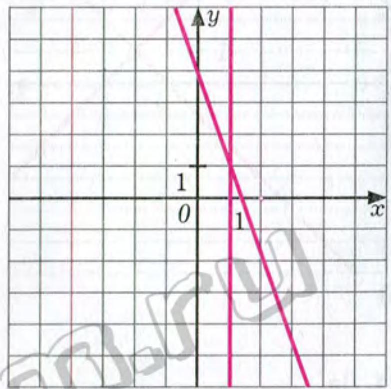
в)

Рис. 12

5. а) (2; 2), см. рис. 13а; в) (1; 1), см. рис. 13в.



а)



в)

Рис. 13

7. а) (2; 1), см. рис. 14а; в) нет решений, см. рис. 14в.

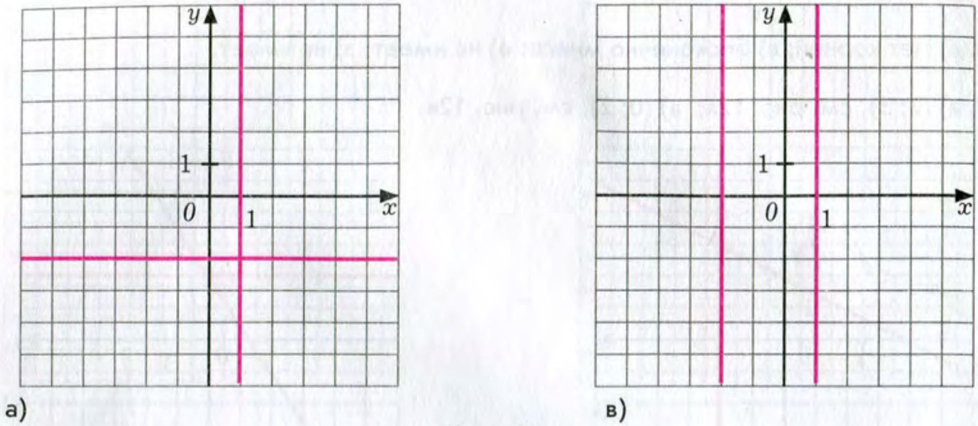


Рис. 14

9. а) $a = 7$, $b = 1$; в) $a = -1$, $b = 3$.

10. а) (≈ 6; $\approx 0{,}5$), см. рис. 15а; в) (9; –2), см. рис. 15в.

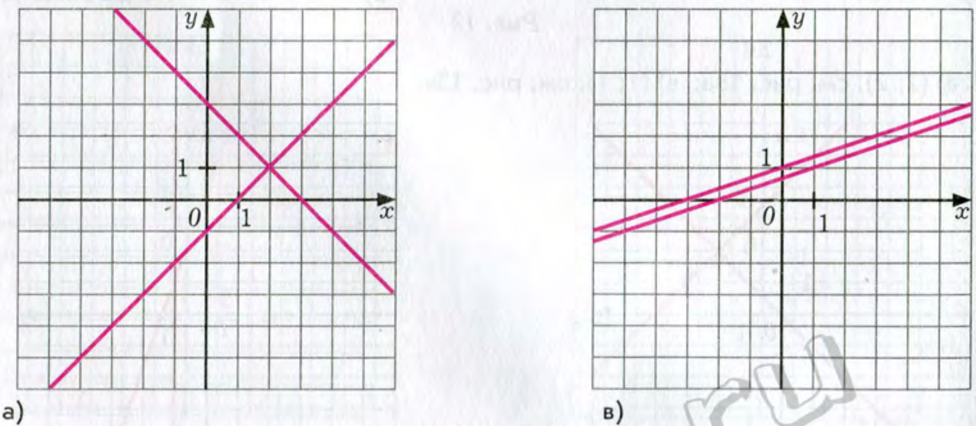


Рис. 15

11. Да.

12. $4x + 3y = 0$; бесконечно много.

13. а) Да.

14. а) (1; 0) и (2; −1), см. рис. 16.

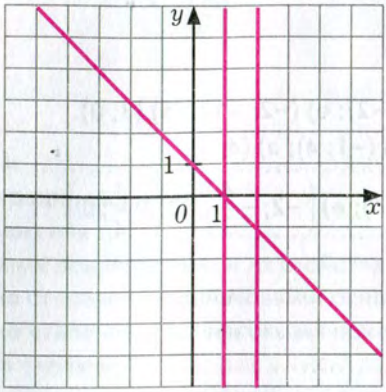


Рис. 16

К параграфу 5.4

1. а) $y = -x$; в) $y = x + 5$; е) $y = \frac{3}{5}x - 3$; з) $y = 4 - x$.

2. а) $x = -\frac{y}{3}$; в) $x = y + 2$; е) $x = -\frac{2}{3}y + 2$; з) $x = -\frac{1}{2}y + 2\frac{1}{2}$.

3. а) (−4; 14); в) (−2; 1); е) (2; 3); з) (6; −12).

4. а) $\left(\frac{8}{11}; \frac{4}{11}\right)$; в) (3; 5); е) (2; 1); з) нет решений.

5. а) (1; −1); в) (1; −2); е) (−4; 3); з) (5; 4).

6. а) (1; 1); в) (3; 3).

7. а) (22; −1); в) (1; 0).

8. а) $a = 7$ и $b = 1$; в) $a = -1$ и $b = 3$.

9. а) (10; 2); в) (1; −1).

10. а) Нет решений.

11. а) $a = 1$.

12. а) Нет решений.

13. а) (−4; −4); (2; −1); в) (1; 1).

К параграфу 5.5

1. а) 7; б) $\frac{1}{3}$.

3. а) Нет решений; в) (3; −2); е) (−2; −12); з) (3; 0).

4. а) (2; −1); в) (2; −2); е) (−1; 4); з) (4; 1).

5. а) Нет решений; в) (6; 6); е) $\left(-2; -\frac{4}{3}\right)$; з) $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

6. а) (1; 1); в) (1; −1).

7. а) (7; 9).

8. а) (0; −1); в) (1; 0).

9. а) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; в) (−1; 5).

10. а) (1; 1); в) (3; 6).

11. а) (5; −2); в) (9; 1).

К параграфу 5.6

1. 14 лет.

3. 2,5 км/ч.

5. 30 и 150.

7. 11 и 12 деталей.

9. 8 и 32.

11. Да; да.

13. 20 и 30 кг.

15. 13 и 11.

17. 200 см.

19. 61.

Содержание